

## Du dielektriniai rutuliai vienalyčiame elektrostatiniame lauke

R. Šimeliūnas, J.A. Virbalis

Teorinės elektrotechnikos katedra Kauno technologijos universitetas

Studentų g. 48, LT-3028 Kaunas, Lietuva, +370-37-300267, el.paštas arvydas.virbalis@ktu.lt

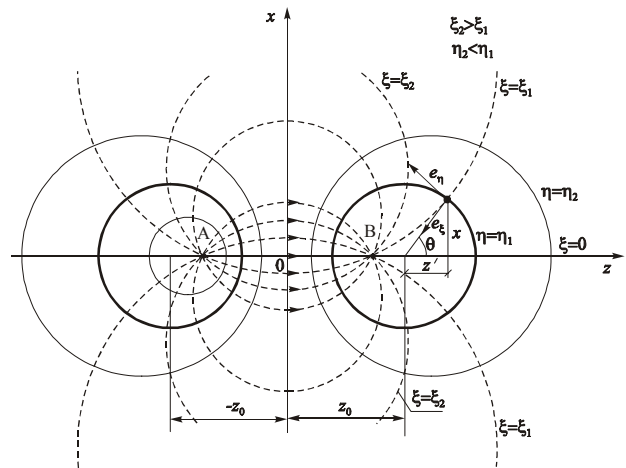
### Ivadas

Viena iš įdomių ir praktiškai svarbių elektromagnetinių srauto matuoklių (EMSM) teorijos sričių yra matavimo signalo formavimo skystyje su priemaišomis dėsninūmai. [1] pateikta EMSM paklaidų analizė, kai laikoma, kad smulkios priemaišos yra rutulio formos. [2] ši analizė apibendrinta elipsoido formos dalelėms. Magnetinio lauko ir virtualiosios srovės pokytis dalelių viduje bei išorėje gautas naudojantis dielektrinio elipsoido poveikiu vienalyčiam elektrostatiniam laukui ir atitinkamų laukų analogija. Tačiau [1] ir [2] atlikta analizė tinka tik tuo atveju, kai tokių dalelių koncentracija nedidelė ir tolygi. Didėjant priemaišų koncentracijai, gautieji rezultatai tampa nekorektiški. Neaišku taip pat, kaip pasiskirsto laukas simetrinėje įgaubtos formos dalelėje. Vienos dalelės įtaką kitai, taip pat dalelės formos įtaką galima išsiaiškinti, nagrinėjant dviejų dielektrinių rutulių vienalyčiame lauke uždavinį. Tokio teorinio uždavinio sprendimo rezultatai gali būti įdomūs ir kitose srityse, pvz., nagrinėjant alyvos netolygumų įtaką transformatorių izoliacijos varžai ir pan. [3] pateikta dviejų laidžių rutulių įtakos vienalyčiam elektrostatiniam laukui analizė. Tačiau čia gauti rezultatai neleidžia analizuoti lauko rutulių viduje. Dviejų dielektrinių rutulių sąveikos su vienalyčiu lauku analizės literatūroje rasti nepavyko.

### Dvisferė koordinatinių sistema

Dvisferė koordinatinių sistema – tai trimatė ortogonalinė koordinatinių sistema, gaunama iš plokščiosios dvipolės koordinatinių sistemos. Dvipolės koordinatinių sistemos koordinatinės linijos yra statmeni vieni kitiems apskritimai  $\eta = \text{const}$  bei  $\xi = \text{const}$ . Šių apskritimų šeimos turi du polius A ir B. Kiekvienas iš apskritimų  $\xi = \text{const}$  eina per šiuos abu taškus, kiekvienas iš apskritimų  $\eta = \text{const} < 0$  apglėbia tašką A, o kiekvienas iš apskritimų  $\eta = \text{const} > 0$  apglėbia tašką B (žr. 1 pav.). Dvisferė koordinatinių sistema gaunama sukant kampą  $\varphi$  aplink  $x$  ašį šias koordinatines linijas. Stačiakampėje koordinatinių sistemoje bet kurią  $\eta$  vertę atitinka sferinis paviršius

$$x^2 + y^2 + (z - a \cdot \coth \eta)^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 \eta}, \quad (1)$$



1 pav. Dvisferės koordinatinių sistemos koordinatinės linijos

$\xi$  vertę – sukimosi paviršius

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a \cdot \cot \xi)^2 + z^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \xi}, \quad (2)$$

o  $\varphi$  vertę – pusplokštumą

$$y = x \cdot \tan \varphi. \quad (3)$$

Čia  $a = \text{const}$ . Bet kuri trimatės erdvės tašką galime gauti, jei dvisferės koordinatinių sistemos koordinatės keičiasi intervaluose:  $-\infty < \eta < \infty$ ,  $0 \leq \xi < \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Tarp koordinatinių  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ir  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\varphi$  yra toks ryšys:

$$\begin{cases} x = \frac{a \sin \xi \cos \varphi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \\ y = \frac{a \sin \xi \sin \varphi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \\ z = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}. \end{cases} \quad (4)$$

Tūrio elementas  $d\tau$  dvisferėje koordinatinių sistemoje išreiškiamas taip:

$$d\tau = \frac{a^3 \sin \xi \cdot d\eta \cdot d\xi \cdot d\varphi}{(\cosh \eta - \cos \xi)^3}. \quad (5)$$

Lygtys  $\eta=\eta_1>0$  ir  $\eta=\eta_2<0$  aprašo dviejų rutulių, kurių centrai yra  $z$  ašyje, paviršius. Rutulių spindulys  $R=a/\text{sh}\eta_{1,2}$ , o jų centrų atstumas iki  $x$  ašies  $z_0=a\text{coth}\eta_{1,2}$ . Visus rutulio, kurio paviršius  $\eta=\eta_1$ , taškus gausime, keisdami  $\eta$  intervale  $(\eta_1, \infty)$ ,  $\xi$  - intervale  $(0, \pi)$ , o  $\varphi$  - intervale  $(0, 2\pi)$ . Keisdami  $\eta_1$  ir  $\eta_2$ , keičiame santykinę rutulių padėtį vienas kito atžvilgiu, o keisdami  $a$  – rutulių spindulius.

### Potencialo aprašymas dvisferėje koordinatinių sistemoje

Tarsime, kad vienalytis laukas  $\mathbf{E}_v = \mathbf{e}_z E_{z0}$  nukreiptas  $z$  ašimi. Jo potencialą  $V_v(x, y, z) = V_v(\eta, \xi, \varphi) = V_v$  galime išreikšti taip:

$$V_v = -zE_{z0} = -aE_{z0} \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}. \quad (6)$$

Išskleiskime šią potencialo išraišką Legendre'o polinomais  $P_\lambda(\cos \xi)$  ir eksponentėmis, naudodamiesi [3]:

$$\begin{aligned} V_v &= -aE_{z0} \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} = \\ &= 2a\sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} E_{z0} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{\cosh \eta - \cos \xi}} = \\ &= \text{sign} \eta \sqrt{2^3} a \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} E_{z0} \times \\ &\times \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[ \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) e^{-(\lambda + \frac{1}{2})\eta} P_\lambda(\cos \xi) \right] = \\ &= K_0 \text{sign} \eta \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[ \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) e^{-(\lambda + \frac{1}{2})\eta} P_\lambda(\cos \xi) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Jeigu į šį lauką pateks du dielektriniai rutuliai su skirtinga nuo aplinkos dielektrine skvarba, juose atsiras paviršiniai surištieji krūviai, kurie sukurs elektrinį lauką kiekvieno iš rutulio viduje ir papildomą lauką jų išorėje. Pirmojo rutulio, apriboto paviršiumi  $\eta=\eta_1>0$ , viduje potencialą galime užrašyti analogiškai (7):

$$V_I = K_0 \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda e^{-(\lambda + \frac{1}{2})\eta} P_\lambda(\cos \xi). \quad (8)$$

Čia  $A_\lambda$  - integravimo konstantos. Šio rutulio viduje  $\eta_1 < \eta < \infty$ , o potencialo vertė ribota, todėl sumuojami tik neigiami eksponentių laipsniai.

Antrojo rutulio, apriboto paviršiumi  $\eta=\eta_2<0$ , viduje  $(-\infty < \eta < \eta_2)$  potencialą galime išreikšti taip:

$$V_{II} = K_0 \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} B_\lambda e^{-(\lambda + \frac{1}{2})\eta} P_\lambda(\cos \xi); \quad (9)$$

čia  $B_\lambda$  - integravimo konstantos.

Papildomo lauko, atsirandančio rutulių išorėje, potencialas yra toks:

$$\begin{aligned} V_{III} &= K_0 \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[ (C_\lambda e^{-(\lambda + \frac{1}{2})\eta} + \right. \\ &\left. + D_\lambda e^{(\lambda + \frac{1}{2})\eta} \right) P_\lambda(\cos \xi) \right]; \quad (10) \end{aligned}$$

čia  $C_\lambda$  ir  $D_\lambda$  - integravimo konstantos.

### Integravimo konstantų apskaičiavimas

Sričių ribose turi būti lygūs potencialai ir toms riboms statmenos elektrinio srauto tankio dedamosios. Iš šių lygybių apskaičiuojame integravimo konstantas. Potencialams šios lygybės išreiškiamos taip:

$$V_I(\eta_1) = V_v(\eta_1) + V_{III}(\eta_1), \quad V_{II}(\eta_2) = V_v(\eta_2) + V_{III}(\eta_2). \quad (11)$$

Iš statmenų sričių riboms elektrinio srauto tankio dedamųjų lygybių išplaukia šios lygtys:

$$\varepsilon_i \partial V_I(\eta_1) / \partial \eta = \varepsilon_e (\partial V_v(\eta_1) / \partial \eta + \partial V_{III}(\eta_1) / \partial \eta), \quad (12)$$

$$\varepsilon_i \partial V_{II}(\eta_2) / \partial \eta = \varepsilon_e (\partial V_v(\eta_2) / \partial \eta + \partial V_{III}(\eta_2) / \partial \eta), \quad (13)$$

čia  $\varepsilon_i$  ir  $\varepsilon_e$  - atitinkamai rutulių vidaus ir jų išorės dielektrinė skvarba. Naudodamiesi šiomis lygybėmis apskaičiavome koeficientą  $A_\lambda$ , laikydami, kad abu rutuliai yra identiški, t.y.  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0$ :

$$A_\lambda = \frac{\kappa \cdot M_{0\lambda}}{\kappa \cdot M_{1\lambda} + M_{2\lambda}} n_\lambda; \quad (14)$$

čia

$$M_{0\lambda} = n_\lambda (\cosh \eta_0 - \cos \xi) e^{n_\lambda \eta_0},$$

$$M_{1\lambda} = (1/2) \sinh \eta_0 \sinh n_\lambda \eta_0 + n_\lambda (\cosh \eta_0 - \cos \xi) \cosh n_\lambda \eta_0,$$

$$M_{2\lambda} = [n_\lambda (\cosh \eta_0 - \cos \xi) - (1/2) \sinh \eta_0] \sinh n_\lambda \eta_0,$$

$$n_\lambda = (1/2) + \lambda.$$

Palyginę (7) ir (8) išraiškas, matome, kad rutulio vidaus potencialo kiekvienos harmonikos santykis  $K_\lambda$  su vienalyčio lauko harmonika gali būti išreikštas taip:

$$K_\lambda = \frac{V_{I\lambda}}{V_{v\lambda}} = \frac{A_\lambda}{n_\lambda}. \quad (15)$$

Žinoma (pvz., [4]), kad jeigu vienalyčiame lauke yra vienas rutulys, tai potencialo rutulio viduje ir vienalyčio lauko potencialo santykis yra toks:

$$K_{\lambda 0} = \frac{3\kappa}{2\kappa + 1}. \quad (16)$$

Rutuliai neturės vienas kitam įtakos, jei  $\eta_0 \rightarrow \infty$ . Kadangi  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} (e^\eta / \sinh \eta) = 2$ ,  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} (\cosh \eta / \sinh \eta) = 1$  ir  $|\cos \xi| \leq 1$ , tai įvertinę  $n_\lambda$  išraišką, gauname:

$$K_{\lambda \infty} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{A_\lambda}{n_\lambda} = \frac{2n_\lambda \kappa}{\frac{n_\lambda - 1/2}{1/2 + n_\lambda} \kappa + 1}. \quad (17)$$

Lygybė  $K_{\lambda \infty} = K_{\lambda 0}$  bus tenkinama, kai  $\lambda = 1$ . Taigi rutulio viduje veiks tik pirmoji eilutės (8) harmonika.

Koeficiento  $K_I = K|_{\lambda=1}$  išraišką gausime iš (14) ir (15), įrašę  $\lambda = 1$  ir šiek tiek pertvarę tas išraiškas:

$$K_I = \frac{m_0 (\cosh \eta_0 - \cos \xi)}{m_1 (\cosh \eta_0 - \cos \xi) + m_2}; \quad (18)$$

čia

$$m_0 = 1,5\kappa e^{1,5\eta_0}, m_1 = 1,5(\kappa \cosh 1,5\eta_0 + \sinh 1,5\eta_0), \quad (19)$$

$$m_2 = 1,5(1 - \kappa) \sinh \eta_0 \sinh 1,5\eta_0.$$

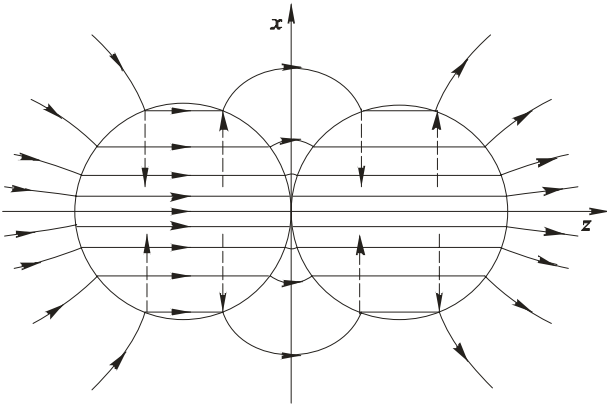
Potencialą pirmojo rutulio viduje išreikšime, turėdami omenyje, kad jis skiriasi nuo vienalyčio lauko potencialo, išreikšto (6) lygtimi, koeficientu  $K_I$ :

$$V_I = -\frac{K_I a E_{z0} \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} = -\frac{m_0}{m_1} \frac{a E_{z0} \sinh \eta (\cosh \eta_0 - \cos \xi)}{[(\cosh \eta_0 - \cos \xi) - m_2/m_1](\cosh \eta - \cos \xi)}. \quad (20)$$

Dėl simetrijos potencialas antrojo rutulio viduje bus aprašomas taip pat, tik jo ženklas bus priešingas.

### Elektrinio lauko stipris rutulių viduje

Elektrinis laukas nagrinėjamoje sistemoje yra simetrinis  $z$  ašies atžvilgiu. Jis vienodai pasiskirstęs kiekvienoje plokštumoje  $\varphi = \text{const}$ .



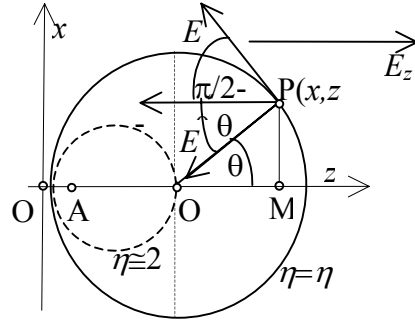
2 pav. Elektrinis laukas gretimų rutulių viduje

Kol rutulių nebuvo, laukas buvo vienalytis ir nukreiptas  $z$  ašies kryptimi. Jei rutulių dielektrinė konstanta skirtinga nuo aplinkos, rutuliuose laukas iškraipomas. 2 pav. matome lauko vaizdą plokštumoje  $y=0$ . Laukas keičia kryptį tik rutulių paviršiuose, kuriuos šioje sankirtoje atstovauja apskritimai. Išskaidykime kiekviename šių apskritimų taške lauko stiprio vektorių į dedamąsias, nukreiptas  $z$  ašies kryptimi ir statmenas jai. Bet kurios  $z$  ašiai statmenos tiesės, kertančios apskritimus, sankirtos taškuose dėl simetrijos statmenos ašiai  $z$  dedamosios bus vienodo dydžio ir priešingų krypčių, taigi kompensuos viena kitą, ir laukas vis tiek bus nukreiptas  $z$  kryptimi. Dvisferėje koordinatinių sistemoje elektrinio lauko stiprio vektorius  $E$  turės dvi komponentes:

$$E = -\text{grad} V_I = -(e_\eta h_\eta \frac{\partial V_I}{\partial \eta} + e_\xi h_\xi \frac{\partial V_I}{\partial \xi}); \quad (21)$$

čia  $h_\eta$  ir  $h_\xi$  - Lamé koeficientai, kurie dvisferėje koordinatinių sistemoje išreiškiami taip:

$$h_\eta = h_\xi = \frac{\cosh \eta - \cos \xi}{a}. \quad (22)$$



3 pav. Elektrinio lauko stiprio dedamosios stačiakampėje ir dvisferėje koordinatinių sistemoje

Komponentių  $E_\eta$  ir  $E_\xi$  teigiamosios kryptys parodytos 3 pav. Iš šio paveikslo matome, kad elektrinio lauko stiprio komponentę  $E_z$  tiek rutulio riboje  $\eta = \eta_0$ , tiek sferos viduje  $\eta > \eta_0$  galime išreikšti taip:

$$E_z = -(E_\eta \cos \theta + E_\xi \sin \theta). \quad (23)$$

Iš trikampio  $O'MP$  gauname  $\cos \theta = O'M/PO'$ ,  $\sin \theta = PM/O'P$ . Savo ruožtu  $PM = x$ ,  $O'M = z' = z - OO' = z - a \cosh \eta / \sinh \eta$ . Vertindami (4), gauname:

$$\cos \theta = \frac{z'}{\sqrt{z'^2 + x^2}} = \frac{\cosh \eta \cdot \cos \xi - 1}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (24)$$

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{z'^2 + x^2}} = \frac{\sinh \eta \cdot \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}.$$

Naudodami (20)-(24) lygtis,  $E$  išreikšime taip:

$$E = E_z = E_{z0} \frac{m_0}{m_1} \cdot \left[ \frac{\cosh \eta_0 - \cos \xi}{\cosh \eta_0 - \cos \xi - \frac{m_2}{m_1}} + \frac{m_2}{m_1} \frac{\sin \xi \sinh \eta}{(\cosh \eta_0 - \cos \xi - \frac{m_2}{m_1})^2 (\cosh \eta - \cos \xi)} \right]. \quad (25)$$

Skirtingai negu viename rutulyje, dviejuose gretimuose rutuliuose laukas bus pasiskirstęs netolygiai (kinta  $x$  ašies kryptimi). Todėl vertinsime vidutinę lauko vertę. Mums ši vertė yra aktualiausia, kai rutuliai liečiasi vienas su kitu.

### Vidutinis elektrinio lauko stipris susiliečiančių rutulių viduje

Rutuliai pradeda liestis vienas su kitu, kai  $\eta_0 \rightarrow 0$ . Vidutinę elektrinio lauko stiprio vertę gausime apskaičiuavę elektrinio lauko integralo rutulio tūryje santykį su tuo tūriu. Tačiau integruojant visame tūryje (25) išraišką, atsiranda dėmenų, kurių vertės tam tikrame kintamųjų diapazone yra neapibrėžtos (pvz., neigiamojo skaičiaus logaritmas). Kadangi laukas rutulio viduje pasiskirstęs simetriškai, šią kliūtį galime įveikti, integruodami dalyje tūrio. Kai  $\cos \theta = 0$ , iš (24) gauname  $\cos \xi = 1/\cosh \eta$ . Taigi  $\theta$  intervalą  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , t.y. dešinįjį nagrinėjamojo rutulio pusrutulį, atitinka  $\cos \xi$  intervalas  $(1/\cosh \eta) \leq \cos \xi \leq 1$ . Kai  $\eta_0 \rightarrow 0$ , rutulio spindulį galime išreikšti taip:

$R_{\eta_0} = a/\sinh \eta_0 \approx a/\eta_0$ . Su dešiniojo pusrutulio taškų  $\eta$  vertėmis susietų rutulių  $\eta = \text{const}$  spinduliai tenkina sąlygą  $R_{\eta} \geq (1/2)R_{\eta_0} \approx a/2\eta_0$ . Jeigu  $\eta_0$  pakankamai mažas, šiame pusrutulyje  $\eta$  keičiasi ribose  $\eta_0 \leq \eta \leq 2\eta_0$ . Rutulio tūrį šiuo atveju galime išreikšti taip:  $\tau = 4\pi R_{\eta}^3/3 = 4\pi a^3/3 \sinh^3 \eta_0 \approx 4\pi a^3/3 \eta_0^3$ . Vidutinę elektrinio lauko stiprio vertę  $\bar{E}_{0,5}$  dešiniajame pusrutulyje, įvertinę (3), galime gauti taip:

$$\bar{E}_{0,5} = \frac{3\eta_0}{2\pi a^3} \int_0^{2\eta_0} \int_{\eta_0}^{\xi_v} \int_0^{\xi} E_z \frac{a^3 \sin \xi}{(\cosh \eta - \cos \xi)^3} d\xi d\eta d\varphi, \quad (26)$$

$$\xi_v = \arccos(1/\cosh \eta).$$

Kadangi  $\eta$  nepriklauso nuo  $\xi$ , integruojant pagal  $\xi$ , kintamąjį patogų pakeisti taip:  $s = \cosh \eta - \cos \xi$ . Tada  $\sin \xi d\xi = -ds$ ,  $d\xi = -ds/s$ . Išreikšdami  $s$  rėžius, įvertinsime tai, kad maksimali  $\eta$  vertė šiame pusrutulyje yra  $2\eta_0$ . Kai  $\eta_0 \rightarrow 0$ , funkcijas  $\cosh \eta$  ir  $\sinh \eta$  patogų išskleisti  $\eta$  laipsnių eilutėmis, paliekant narius su žemiausiais laipsniais. Tada rėžį  $\xi_a = 0$  atitiks rėžis  $s_a = \cosh \eta - 1 \approx \eta^2/2$ , o rėžį  $\xi_v = \arccos(1/\cosh \eta)$  – rėžis  $s_v = \cosh \eta - 1/\cosh \eta \approx (\cosh^2 \eta - 1)/\cosh \eta \approx \sinh^2 \eta/\cosh \eta \approx \eta^2$ . Įvertinus visa tai, (25) išraiška pasikeis taip:

$$\bar{E} = 3\eta_0^3 E_{z0} \frac{m_0}{m_1} \int_{\eta_0}^{2\eta_0} \int_{\eta/2}^{\eta} \frac{s - 0,5(\eta^2 - \eta_0^2)}{[s - 0,5(\eta^2 + f_1 \eta_0^2)] s^3} ds d\eta +$$

$$+ 3\eta_0^5 f_0 E_{z0} \int_{\eta_0}^{2\eta_0} \int_{\eta/2}^{\eta} \frac{[1 - (0,5\eta^2 + 1 - s)^2] ds}{[s - 0,5(\eta^2 + f_1 \eta_0^2)]^2 s^3}; \quad (27)$$

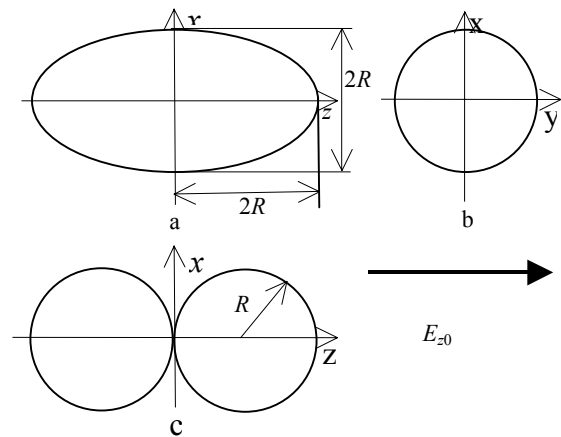
čia  $f_0 = (m_2/m_1)/\eta_0^2 = (1 - \kappa)/(2\kappa + 3\eta_0)$ ,  $f_1 = 2f_0 - 1$ .

Šio integralo vertė esti didžiausia, kai  $\eta_0 = 0$ ,  $\kappa \ll 1$ ,  $E_{\max} \rightarrow 3,53\kappa$ . Nagrinėjant tokios formos priemaišų įtaką elektromagnetinio srauto matuoklių metrologinėms charakteristikoms, mus labiausiai domina, kaip keičiasi gretimų rutulių viduje elektrinė slinktis  $D_i$ , nes taip pat kaip ir ji kinta virtualioji srovė  $j_i$  ir magnetinio srauto tankis  $B_i$  elektromagnetinio srauto matuoklio kanale:

$$D_{i \max} = \epsilon_i \bar{E}_{i \max} = 3,53 \epsilon_i \frac{\epsilon_e}{\epsilon_i} E_{z0} = K_{2r} D_{z0} = 3,53 D_{z0}.$$

Taigi maksimalus vidinio lauko srauto tankio prieaugis neviršija 20% vieno rutulio vidinio lauko tankio vertės. Palyginimui galime įvertinti, kad sferoido, kurio didžioji ašis dvigubai ilgesnė už mažąsias, viduje, pastarajam patekus į išorinį vienalytį lauką, orientuotą išilgai didžiosios ašies  $D_{i \max} = 5,76 D_0$ . Į du suglaustus rutulius ir į atitinkamo ilgio ir skersmens sferoidą galime žiūrėti, kaip į ribinius bendrojo pavidalo formos dalelių,

kuriose gali būti įdubos, atvejus (žr. 4 pav.). Matome, kad dalelių su įdubomis viduje laukas gali gerokai susilpnėti.



4 pav. Sferoidas ir du suglausti rutuliai: sferoido pjūvis a)  $xz$  plokštumoje, b)  $xy$  plokštumoje, c) rutulių pjūvis  $xz$  plokštumoje

## Išvados

1. Naudojantis dvisfere koordinacių sistema apskaičiuotas vidinis elektrinis laukas dviejuose gretimuose dielektriniuose vienodo spindulio rutuliuose, patekusiuose į vienalytį elektrostatinį lauką.

2. Skirtingai nuo vieno rutulio, esančio vienalyčiame lauke, dviejų gretimų dielektrinių rutulių, esančių vienalyčiame lauke, vidinis laukas yra nevienalytis, tačiau lauko kryptis sutampa su išorinio lauko kryptimi.

3. Vidutinė elektrinio srauto tankio vertė, kai du rutuliai susilietę, maždaug 20% didesnė negu viename rutulyje.

4. Gautieji rezultatai naudingi tiriant magnetinio ir virtualiosios srovės laukus elektromagnetinio srauto matuokliuose, esant įvairių formų priemaišoms, taip pat tiriant įvairius laukus nevienalytėje aplinkoje.

## Literatūra

1. **Virbalis J.A.** Errors in electromagnetic flow meter with magnetic particles // Flow Measurement and Instrumentation. – Elsevier Science Ltd., 2001. – No. 12. – P.275-282.
2. **Virbalis J.A.** Elektromagnetinio skysčio srauto matuoklio signalas elipsoido formos magnetinėse dalelėse // Elektronika ir elektrotechnika.- Kaunas: Technologija, 2001.- Nr. 6(34).- P. 51-54.
3. **Бухгольц Г.** Расчет электрических и магнитных полей. – Москва: Иностранная литература, 1961. – 712с.

Pateikta spaudai 2003 05 15

**R.Šimeliūnas, J.A.Virbalis Du dielektriniai rutuliai vienalyčiame elektrostatiame lauke // Elektronika ir elektrotechnika.- Kaunas: Technologija, 2003.- Nr.6(48).- P.33-37.**

Dviejų gretimų dielektrinių rutulių, esančių vienalyčiame elektrostatiame lauke, vidinis laukas yra kitoks palyginti su vieno rutulio vidiniu lauku. Šį lauką galima apskaičiuoti naudojantis dvisfere koordinacių sistema. Vienalyčio elektrostatinio lauko potencialo ir papildomų potencialų išraiškos buvo išskleistos dvisferėje koordinacių sistemoje Legendre'o daugianariais ir laipsnine eilute bei išspręsta Laplace'o lygtis. Integravimo koeficientų išraiškos buvo gautos naudojantis standartinėmis kraštinėmis sąlygomis bei bei vidinio ir išorinio vienalyčio lauko potencialų santykiu pakankamai nutolusiuose rutuliuose. Vidinis laukas dviejuose gretimuose rutuliuose yra nevienalytis, tačiau sutampa su išorinio lauko kryptimi. Kai rutuliai suglausti, vidutinė elektrinio srauto tankio vertė

maždaug 20% viršija jo vertę atskirame rutulyje. Gautieji rezultatai naudingi skaičiuojant magnetinio lauko ir virtualiosios srovės tankio pasiskirstymą elektromagnetinio srauto matuoklio matavimo kanale, esant įvairių formų magnetinėms priemonėms, taip pat tiriant įvairius laukus nevienalytėje aplinkoje. III.4, bibl.3 (lietuvių k., santraukos lietuvių, anglų ir rusų kalbomis).

**R.Šimeliūnas, J.A.Virbalis Two Dielectric Spheres in Uniform Electrostatic Field // Electronics and Electrical Engineering.- Kaunas: Technologija, 2003.- No.6(48).- P.33-37.**

The internal field of two contiguous dielectrical spheres in external uniform electrostatic field is different in comparison with internal field of alone sphere. We can calculate this field using bispherical coordinate system. The expressions of potential of uniform electrostatic field and extra potentials were written as degrees series of polynomials of Legendre and the Laplace equation was worked out. The expressions of integration coefficients were obtained using the boundary conditions and the relation between the internal potential of alone sphere and external uniform potential. The internal field of two contiguous spheres is not uniform but it is directed along the external uniform field. When the sphere is in touch with identical sphere, the average value of electrical flux density exceed about 20% analogical value in alone sphere. The obtained results are useful for calculation of distribution of magnetic field and virtual current density in duct of electromagnetic flow meter with magnetic admixtures and for investigation of different fields in inhomogeneous media. II.4, bibl.3 (in Lithuanian; summaries in Lithuanian, English, Russian).

**Р.Шимелюнас, Ю.А.Вирбалис Два диэлектрических шара в однородном электростатическом поле// Электроника и электротехника. - Каунас: Технология, 2003.-№ 6(48).- С. 33-37.**

Внутреннее поле двух расположенных рядом диэлектрических шаров, находящихся в однородном электростатическом поле, отличается от внутреннего поля одиночного шара. Это поле можно рассчитать, пользуясь бисферической координатной системой. Выражение для потенциала однородного поля и дополнительных потенциалов было разложено в степенной ряд по полиномам Лежандра и было решено уравнение Лапласа. Выражения коэффициентов интегрирования были получены пользуясь граничными условиями и отношением между внутренним потенциалом удаленных шаров и потенциалом внешнего однородного поля. Внутреннее поле в двух расположенных рядом шарах неоднородное, а его направление совпадает с направлением внешнего поля. Если шары касаются друг друга, среднее значение плотности электрического потока примерно 20% превышает его значение в одиночном шаре. Полученные результаты полезны при расчете распределения магнитного поля и плотности виртуального тока в канале электромагнитного расходомера, а также при расчете различных полей в неоднородной среде. Ил.4, библи. 3 (на литовском языке; рефераты на литовском, английском и русском яз.).

DOI: 10.5755/j02.eie.11128