

## Prioritetinių paraiškų srautų aptarnavimo $M/M/1/n$ sistemos analizė

J. Gvergždys, A. Mikšys, R. Rindzevičius, S. Šimkevičius

Telekomunikacijų katedra, Kauno technologijos universitetas

Studentų g. 50, LT-51368 Kaunas, Lietuva, tel. +370 37 300515, el. paštas ramrin@tef.ktu.lt

### Ivadas

Realaus laiko informacijos perdavimo technologijose vis plačiau naudojami prioritetinių duomenų perdavimo algoritmai [1]. Plačiai pritaikomos prioritetinės sistemos, kuriose valdymo informacija ir tinklo darbui gyvybiškai svarbūs duomenys perduodami aukštesniu prioritetu negu kiti duomenų paketai. Norint užtikrinti vėlinimo trukmei jautrios informacijos perdavimo kokybę, būtina turimus informacijos perdavimo šaltinius suskirstyti į skirtingų prioritetų klases. Aukštesnį prioritetą turinčio šaltinio informacija perduodama pirmiau už žemesnį prioritetą turinčio šaltinio informaciją. Pastaruoju metu mokslinėje spaudoje pasirodė nemaža darbų, nagrinėjančių prioritetus turinčių paraiškų srautų aptarnavimo sistemas [1,2,3,4,8]. Šiuose darbuose nagrinėjamos  $M/G/1$  ir  $M/M/1$  sistemos, aptarnaujančios kelių prioritetų paraiškų srautus. Sudarysime išsamų baigtinės buferio talpos  $M/M/1/n$  sistemos darbo matematinį modelį ir juo remdamiesi apskaičiuosime vartotoją dominančias sistemos darbo charakteristikas.  $M/M/1/n$  sistemai analizuoti panaudosime Markovo procesus ir panagrinėsime prioritetinių paraiškų aptarnavimo kokybines charakteristikas turinčios baigtinės talpos buferių sistemoje. Naudojant Markovo procesus galima sudaryti detalų sistemos darbą aprašantį modelį ir gauti daugelio sistemos darbą nusakančių charakteristikų analitines išraiškas, leidžiančias išsamiai nagrinėti ir įvertinti tokio tipo sistemose vykstančius procesus. Šios sistemos matematinis modelis įvertina informacijos perdavimo duomenų tinklais kokybę nusakančius parametrus.

### Sistemos analitinis modelis

Informacijos perdavimo sistemoje naudojamas vienas informacijos perdavimo kanalas, kuriuo perduodami paprasti  $j$  prioritetų duomenų paketų atitinkamų parametru  $\lambda_1$  ir  $\lambda_j$  paraiškų srautai (1 pav.).

Paraiškos aptarnaujamos riboto eilės ilgio sistema, t.y. buferio talpa apribojama dydžiu  $n$ . Tarkime, duomenų srautų paketų ilgiai pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį, esant vidutiniams duomenų paketų ilgiams atitinkamai  $\bar{l}_1, \bar{l}_j$ :

$$P_k(l \leq i) = 1 - e^{-i/\bar{l}_k}, \quad i=0,1,2,\dots; k=1,2,\dots,j. \quad (1)$$

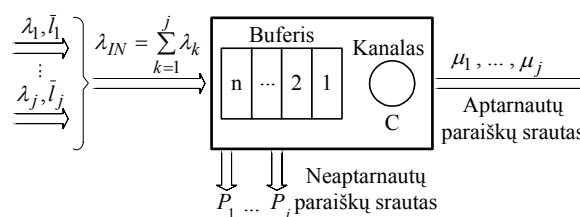
Esant vienodai informacijos kanalo duomenų perdavimo spartai  $C$ , kiekvieno prioriteto paraiškos duomenų paketo perdavimo kanalu vidutinė trukmė

$$\bar{T}_k = \bar{l}_k / C, \quad k=1,2,\dots,j, \quad (2)$$

irgi bus pasiskirsčiusi pagal eksponentinį dėsnį atitinkamais parametrais  $\mu_k = 1/\bar{T}_k$ . Sujungus visų prioritetų paraiškų srautus, į sistemą patenkantis paraiškų srautas irgi taps paprastuoju parametru  $\lambda_{IN} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j$ :

$$P_k(0, t) = \frac{(\lambda_{IN} t)^k}{k!} e^{-\lambda_{IN} t}, \quad 0 < t < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Čia  $P_k(0, t)$  – tikimybė, kad  $[0, t)$  laikotarpiu į sistemą ateis  $k$  paraiškų.

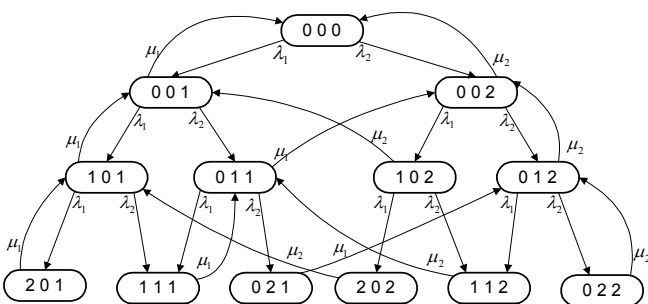


1 pav. Informacijos perdavimo sistemos modelis

Pirmojo prioriteto srauto duomenų paketai, laukiantys perdavimo buferyje, perduodami kanalu pirmiau antrojo prioriteto srauto duomenų paketų nepriklausomai nuo jų atėjimo laiko. To paties prioriteto srauto duomenų paketai kanalu perduodami atsižvelgiant į jų atėjimo laiką. Jei aukštesnio prioriteto paraiška ateina tuo momentu, kai perdavimo kanalas užimtas žemesnio prioriteto paraiškos perdavimu, jos perdavimas tęsiamas iki pabaigos. Paraiškos, patenkančios į sistemą laiko momentais, kai buferis yra užpildytas, neaptarnaujamos ir tolesniam sistemos darbui įtakos neturi. Šią informacijos perdavimo sistemą Kendalo [5] pasiūlymu sutrumpintai galima

pavadinti kelių prioritetų paprastuosius paraiškų srautus aptarnaujančia  $M/M/1/n$  sistema.

Detaliai išnagrinėsime dviejų prioritetų paraiškų srautus aptarnaujančią  $M/M/1/n$  sistemą, kurios buferio talpa  $n=2$ . Šioje sistemoje vykstančius procesus galima pavaizduoti Markovo grandine (2 pav.), kurioje kiekvieną būseną nusako trijų parametru vektorius  $(X, Y, Z)$ .  $X$  parametru nusakomas buferyje esančių pirmojo prioriteto paraiškų skaičius,  $Y$  parametru – buferyje esančių antrojo prioriteto paraiškų skaičius,  $Z$  parametru – informacijos kanalu perduodamos paraiškos prioritetas. Sistemos būsenų vektoriaus parametru  $X$  ir  $Y$  vertės bendroju atveju gali kisti nuo 0 iki  $n$ , o  $Z$  parametras gali įgyti vertę 1, kai kanalu perduodama pirmojo prioriteto paraiška arba vertę 2, kai kanalu perduodama antrojo prioriteto paraiška.



2 pav. Dviejų prioritetų paprastų paraiškų srautus aptarnaujančios  $M/M/1/2$  sistemos Markovo grandinė

Sistemos galimų būsenų skaičius  $S$  priklauso nuo buferio talpos  $n$  ir yra lygus

$$S = (n + 1)(n + 2) + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

$$\begin{cases} \mu_1 P_{001} + \mu_2 P_{002} - (\lambda_1 + \lambda_2) P_{000} = 0, \\ \lambda_1 P_{000} + \mu_2 P_{102} + \mu_1 P_{101} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P_{001} = 0 \\ \mu_1 P_{011} + \mu_2 P_{012} + \lambda_2 P_{000} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) P_{002} = 0, \\ \mu_2 P_{202} + \mu_1 P_{201} + \lambda_1 P_{001} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P_{101} = 0, \\ \mu_1 P_{111} + \mu_2 P_{112} + \lambda_2 P_{001} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P_{011} = 0, \\ \lambda_1 P_{002} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) P_{102} = 0, \\ \lambda_2 P_{002} + \mu_2 P_{022} + \mu_1 P_{021} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) P_{012} = 0 \\ \lambda_1 P_{101} - \mu_1 P_{201} = 0, \\ \lambda_1 P_{011} + \lambda_2 P_{101} - \mu_1 P_{111} = 0, \\ \lambda_2 P_{011} - \mu_1 P_{021} = 0, \\ \lambda_1 P_{102} - \mu_2 P_{202} = 0, \\ \lambda_2 P_{102} + \lambda_1 P_{012} - \mu_2 P_{112} = 0, \\ \lambda_2 P_{012} - \mu_2 P_{022} = 0, \\ \sum_{VISUSXYZ} P_{XYZ} = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Kai sistema veikia stacionariu režimu, 2 pav. pavaizduotos Markovo grandinės būsenoms galima užrašyti tiesinių lygčių sistemą (5)

Visų galimų sistemos būsenų tikimybių suma lygi vienetui. Didinant buferio talpą  $n$ , būsenų skaičius  $S$  sistemoje sparčiai didėja (4). Sudaryta programa, leidžianti užrašyti lygčių sistemas automatiškai būdu, esant bet kuriai buferio talpos  $n$  reikšmei. Išsprendus (5) lygčių sistemą įterptųjų Markovo grandinių metodu, apskaičiuojamos visų informacijos perdavimo sistemos būsenų tikimybių  $P_{XYZ}$  reikšmės.

Turint šių būsenų tikimybių reikšmes, galima apskaičiuoti sistemos darbą įvertinančias charakteristikas.

Bendro paraiškų įėjimo srauto intensyvumas

$$\lambda_{IN} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k.$$

1) Bendrojo srauto bet kurio prioriteto paraiškos neaptarnavimo tikimybė:

$$P_{neapt} = P_{201} + P_{111} + P_{021} + P_{202} + P_{112} + P_{022}. \quad (6)$$

2) Pirmojo prioriteto paraiškų srauto neaptarnavimo tikimybė:

$$P_1 = P_{neapt} \frac{\lambda_1}{\lambda_{IN}}. \quad (7)$$

3) Antrojo prioriteto paraiškų srauto neaptarnavimo tikimybė:

$$P_2 = P_{neapt} \frac{\lambda_2}{\lambda_{IN}}. \quad (8)$$

4) Pirmojo prioriteto aptarnautų paraiškų srauto intensyvumas:

$$\lambda_{1apt} = \lambda_1 (1 - P_1). \quad (9)$$

5) Antrojo prioriteto aptarnautų paraiškų srauto intensyvumas:

$$\lambda_{2apt} = \lambda_2 (1 - P_2). \quad (10)$$

6) Informacijos perdavimo kanalo panaudojimo veiksnys:

$$\rho = \frac{\lambda_{IN}}{\sum_{k=1}^2 \frac{\lambda_k \mu_k}{\lambda_{IN}}} = \frac{1}{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2}. \quad (11)$$

7) Bendras aptarnautų paraiškų srauto intensyvumas:

$$\mu_{apt} = \lambda_{IN} (1 - P_{neapt}). \quad (12)$$

$$\bar{T}_s = \bar{W} + \bar{T}_{apt}. \quad (21)$$

8) Vidutinis paraiškų skaičius buferyje:

$$\bar{N}_q = P_{101} + P_{011} + P_{102} + P_{012} + 2(P_{201} + P_{111} + P_{021} + P_{202} + P_{112} + P_{022}). \quad (13)$$

9) Vidutinis pirmojo prioriteto paraiškų skaičius buferyje:

$$\bar{N}_{1q} = P_{101} + P_{102} + P_{111} + P_{112} + 2(P_{201} + P_{202}). \quad (14)$$

10) Vidutinis antrojo prioriteto paraiškų skaičius buferyje:

$$\bar{N}_{2q} = P_{011} + P_{012} + P_{111} + P_{112} + 2(P_{021} + P_{022}). \quad (15)$$

11) Vidutinė paraiškos aptarnavimo trukmė:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{apt} &= \frac{\bar{T}_1 \lambda_{1apt} + \bar{T}_2 \lambda_{2apt}}{\lambda_{1apt} + \lambda_{2apt}} = \\ &= \frac{\frac{1}{\mu_1} \lambda_1 (1 - P_1) + \frac{1}{\mu_2} \lambda_2 (1 - P_2)}{\lambda_1 (1 - P_1) + \lambda_2 (1 - P_2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

12) Vidutinė pirmojo prioriteto paraiškos laukimo eilėje trukmė nustatoma iš Litlo formulės:

$$\bar{W}_1 = \frac{N_{1q}}{\lambda_{1apt}} = \frac{N_{1q}}{\lambda_1 (1 - P_1)}. \quad (17)$$

13) Vidutinė antrojo prioriteto paraiškos laukimo eilėje trukmė:

$$\bar{W}_2 = \frac{N_{2q}}{\lambda_{2apt}} = \frac{N_{2q}}{\lambda_2 (1 - P_2)}. \quad (18)$$

14) Informacijos perdavimo kanalo užimtumo tikimybė:

$$p_{kan} = 1 - P_{000}. \quad (19)$$

15) Vidutinė bet kurios paraiškos laukimo eilėje trukmė nustatoma naudojantis Litlo formule:

$$\bar{W} = \frac{\bar{N}_q}{\lambda_{1apt} + \lambda_{2apt}} = \frac{\bar{N}_{1q} + \bar{N}_{2q}}{\lambda_1 (1 - P_1) + \lambda_2 (1 - P_2)}. \quad (20)$$

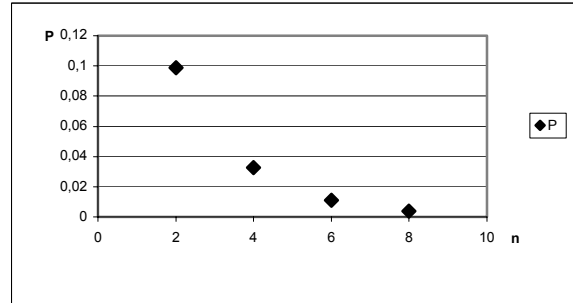
16) Vidutinė paraiškos buvimo sistemoje trukmė:

17) Vidutinė pirmojo prioriteto paraiškos buvimo sistemoje trukmė:

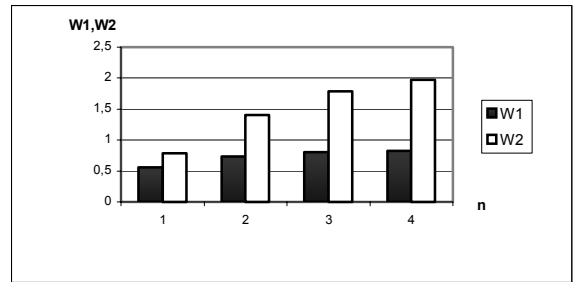
$$\bar{T}_{1s} = \bar{W}_1 + \bar{T}_1. \quad (22)$$

20) Vidutinė antrojo prioriteto paraiškos buvimo sistemoje trukmė:

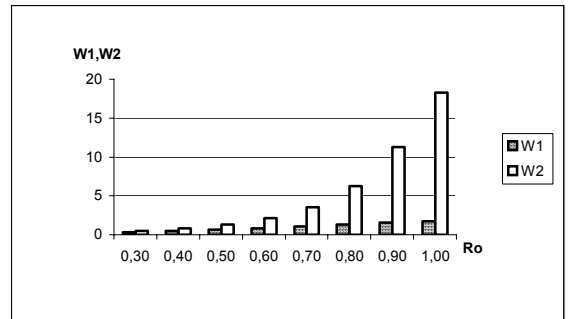
$$\bar{T}_{2s} = \bar{W}_2 + \bar{T}_2. \quad (23)$$



3 pav. Paraiškų neaptarnavimo tikimybės  $P$  priklausomybė nuo sistemoje naudojamos buferio talpos  $n$ , kai  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,3$  ir  $\mu_1 = \mu_2 = 1$



4 pav. Vidutinių laukimo eilėje trukmių  $W_1, W_2$  priklausomybė nuo sistemoje naudojamos buferio talpos  $n$ , kai  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,3$  ir  $\mu_1 = \mu_2 = 1$



5 pav. Vidutinių laukimo eilėje trukmių  $W_1, W_2$  priklausomybė nuo kanalo panaudojimo veiksnio  $\rho$ , kai  $\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2 = 1, n = 20$   
Panaudojant sistemos darbą nusakančių charakteristikų apskaičiavimo išraiškas, gauti rezultatai pateikti 3,4,5 pav. grafikuose.

## Išvados

1. Panaudojus Markovo procesus, sukurtas detalus sistemos darbo modelis, leidžiantis apskaičiuoti dviejų prioritetų paraiškas aptarnaujančios sistemos informacijos perdavimo kokybės charakteristikas.
2. Iš apskaičiuotų sistemos informacijos perdavimo kokybės charakteristikų (5 pav.) matome, kad kanalo panaudojimo veiksniai  $\rho$  artėjant prie vieneto, labai sparčiai ilgėja žemesnio prioriteto paraiškų vidutinė laukimo eilėje trukmė. Norint užtikrinti nedidelę žemesnio prioriteto paraiškų vėlinimo sistemoje trukmę, būtina, kad kanalo panaudojimo veiksnys neviršytų 0,5-0,7 vertės.
3. Iš pateiktų rezultatų (3,4 pav.) akivaizdu, kad, didinant  $M/M/1/n$  sistemos buferio talpą  $n$ , sumažėja prarastų tinkle informacijos paketų dalis, tačiau dėl to sparčiai ilgėja žemesnio prioriteto paraiškų buvimo buferyje trukmė.

## Literatūra

1. **Hock Chee Ng.** Queueing Modelling Fundamentals. Chichester, John Wiley & Sons. –1996. – 222.p.
2. **Rindzevičius R.** Teletrafiko teorija. Kaunas.: Technologija, 2003. – 252 p.
3. **Ye J. Li S.** Analysis of Multimedia Traffic Queues with Finite Buffer and Overload Control” // INFOCOM’92. – P.. 1464-1474.
4. **Jaiswal J.M.** Priority Queues.-New York: Academic Press, 1968. – 345 p.
5. **Kendall D.G.** Some Problems in the Theory of Queues// Journal of the Statistical Society . Ser. B., 13. – P. 151-185.
6. **Chang W.** Preemptive Priority Queues// Operation Research, 13. – P. 820-827.
7. **Jaiswal N.K.** Preemptive Resume Priority Queue // Operations Research, 9. – P. 732-742.
8. **Gelenbe E., Pujolle G.** Introduction to Queueing Networks. Wiley, Chichester, 1999. – P. 99-105.

Pateikta spaudai 2003 11 25

### **J. Gvergždys, A. Mikšys, R. Rindzevičius, S. Šimkevičius. Prioritetinių paraiškų srautų aptarnavimo $M/M/1/n$ sistemos analizė //Elektronika ir elektrotechnika. – Kaunas: Technologija, 2004. – Nr. 2(51). – P.52-55.**

Analizuojama duomenų perdavimo tinkluose naudojama prioritetinių duomenų paketų perdavimo esant eilei  $M/M/1/n$  sistema. Į sistemą patenka duomenų paketai, priklausantys  $i$  ( $i=1,2$ ) prioritetų klasėms. Kuo mažesnis prioriteto klasės skaitmuo, tuo aukštesnis perdavimo prioritetas. Laikoma, kad žemesnio prioriteto paraiškų perdavimas kanalu nenutrūksta į sistemą atėjus aukštesnio prioriteto paraiškai. Į sistemą ateina puasoniniai kiekvieno prioriteto duomenų paketų srautai atitinkamai intensyvumais  $\lambda_i$  ir perduodami vienu kanalu atitinkamai intensyvumais  $\mu_i$ , ir kiekvieno srauto duomenų paketo perdavimo ryšio kanalu trukmė pasiskirsčiusi pagal eksponentinį dėsnį, esant atitinkamai vidutinei trukmei  $\bar{T}_i$ . Tos pačios prioriteto klasės duomenų paketai perduodami kanalu priklausomai nuo jų atėjimo į sistemą momento. Modelyje panaudotos Markovo grandinės leido sudaryti tikslų dviejų prioritetų paraiškas aptarnaujančios  $M/M/1/n$  sistemos analitinį modelį ir išvesti formules visų prioriteto klasių duomenų paketų perdavimo parametrų įvertinti. Pateikta sistemos perėjimų iš vienos būsenos į kitą diagrama. Grafikuose pateikti informacijos perdavimo sistemos parametrų apskaičiavimo rezultatai. Il. 5, bibl. 8 (lietuvių kalba; santraukos lietuvių, anglų, rusų k.).

### **J. Gvergždys, A. Mikšys, R. Rindzevičius, S. Šimkevičius. Analysis of Priority Queueing System $M/M/1/n$ //Electronics and Electrical Engineering .- Kaunas: Technologija, 2004. – No. 2(51). – P.52-55.**

There are applications of the priority queueing system  $M/M/1/n$  used in the data transmission networks. We assume that an arriving data packets belongs to a priority class  $i$  ( $i=1,2$ ). The smaller the priority class number, the higher the priority. We consider the case where a data packet already in service is not pre-empted by an arriving data packet with higher priority class. In this model the data packets of each priority class arrive according to a Poisson process with rate  $\lambda_i$  and are transmitted by the same channel with an exponentially distributed transmission time of mean  $T_i$ . Within each priority class data packets are transmitted on their order of arrival. Using the Markov chains exact analytical model was created for  $M/M/1/n$  system and there are presented formulas for evaluation all parameters for two priority classes of data packets transmission. The Markov chains state transition diagram is taken. The various system performance measures important to priority class data packet transmission are computed. Some calculated system performance measures are presented. Ill. 5, bibl. 8 (In Lithuanian; summaries in Lithuanian, English, Russian).

### **Ю. Гвергждис, А. Микшис, Р. Риндзявичюс, С. Шимкевичюс. Исследование $M/M/1/n$ системы обслуживающей потоки вызовов с приоритетами // Электроника и электротехника. – Каунас: Технология, 2004. - № 2(51). – С. 52-55.**

Анализируется  $M/M/1/n$  система с очередью в сети передачи данных обслуживающая пакеты данных с приоритетами. В систему поступают потоки пакетов данных, имеющих  $i$  ( $i=1,2$ ) классов приоритетов. Чем меньше значение класса приоритета, тем выше его приоритет обслуживания. Передача пакета данных меньшего приоритета по каналу не прерывается при поступлении в систему пакета данных с высшим приоритетом. В систему поступают пуассоновские потоки данных для всех приоритетов со соответствующими интенсивностями  $\lambda_i$  и передаются по одному каналу со соответствующими интенсивностями  $\mu_i$ . Время передачи пакета данных любого приоритета распределено экспоненциально со средним значением  $T_i$ . Пакеты данных одного класса приоритетов передаются по каналу в порядке их поступления. При помощи марковских процессов разработана точная аналитическая модель  $M/M/1/n$  системы для расчета характеристик обслуживания двух классов приоритетов данных. Представлена диаграмма марковского процесса перехода системы из одного состояния в другое. Результаты расчетов представлены в графиках. Ил. 5, библи. 8 (на литовском языке; рефераты на литовском, английском и русском яз.)

DOI: 10.5755/j02.eie.10972