ISSN 1392 – 1215 ELEKTRONIKA IR ELEKTROTECHNIKA. 2004. 2(51)

T 121 SIGNALŲ TECHNOLOGIJA

Stačiakampės simpleksinės paieškos statistinės charakteristikos

A. Dambrauskas, V. Rinkevičius
Automatikos katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas
Naugarduko g. 41, LT-03227 Vilnius, Lietuva; el. p. algirdas.dambrauskas@el.vtu.lt

Įvadas

Simpleksinės paieškos panaudojant stačiakampį simpleksą pagrindai išdėstyti [1,2]. Paieškos algoritmai su stačiakampiu simpleksu leidžia apriboti simplekso orientacijų skaičių, kai valdomųjų kintamųjų yra daugiau nei du, ir tai leidžia be didelių problemų taikyti daugiaryšes Markovo grandines paieškos analizės ir algoritmų sintezės uždaviniams spręsti. Be to, šie algoritmai yra paprastesni negu reguliaraus simplekso paieškos algoritmai, turi keletą ypatingų savybių, leidžiančių padidinti paieškos efektyvumą. Jie perspektyvūs ir matematinio programavimo su sveikaisiais skaičiais uždaviniams spręsti.

Šio darbo tikslas – taikant daugiaryšes Markovo grandines, išanalizuoti stačiakampių simpleksų paiešką, surasti paieškos procesų, vykstančių kopimo etape trukdžių aplinkoje, statistines charakteristikas.

Stačiakampio simplekso judėjimo taisyklės

Stačiakampiu vadinamas simpleksas, kuris tenkina sąlygas [3]:

$$(v_m - v_1)^T (v_l - v_1) = 0,\ m,l = 2,\dots,k+1,\ m \neq l; \qquad (1)$$

čia v_1 – vektorius, nustatantis paieškos erdvėje E^k viršūnę, kurioje susijungiančios simplekso briaunos sudaro tarpusavyje stačiuosius kampus; v_m, v_l – viršūnių, kurių numeriai m, l, vektoriai; T – transponavimo ženklas; k – valdomųjų kintamųjų skaičius.

Pradinis simpleksas, turintis k dydžio L_k briaunų, kolinearių su koordinačių ašimis, sudaromas pagal formulę [4]

$$x_{ji} = x_{1i} + \eta_{ji},\quad i = 1,\dots,k,\ j = 1,\dots,k+1; \qquad (2)$$

čia

$$\eta_{ji} = \begin{cases} L_k, & kai\ i = j-1, \\ 0, & kai\ i \neq j-1, \end{cases}$$

i – kintamojo numeris; j – viršūnės numeris.

Pagrindinės stačiakampio simplekso judėjimo taisyklės [2]:

1) kai atspindinčioji viršūnė yra v_r, $r \neq 1$, tai naujos viršūnės koordinatės surandamos iš formulės

$$x_{ri}^H = 2x_{1i} - x_{ri},\ i = 1,\dots,k; \qquad (3)$$

2) kai atspindinčioji viršūnė yra v_1, tai:

a) viršūnė v_1 atspindi simetriškai su viršūnių v_a ir v_b svorio centru:

$$x_{1i}^H = x_{ai} + x_{bi} - x_{1i},\ i = 1,\dots,k; \qquad (4)$$

b) likusios k-2 viršūnės (kai k>2) perkeliamos pagal išraišką

$$x_{ji}^H = 2x_{1i}^H - x_{ai} - x_{bi} + x_{ji}, \qquad (5)$$
$$i = 1,\dots,k,\ j = 1,\dots,k+1,\ j \neq a, b;$$

čia x_{ji}^H, x_{ji} – atitinkamai viršūnių koordinatės naujame ir sename simplekse; a, b – numeriai viršūnių, kuriose

$$y_a = \sup y_j,\quad j = 1,\dots,k+1, \qquad (6)$$
$$y_b = \sup y_j,\ j = 1,\dots,k+1,\ j \neq a.$$

Pradinio simplekso sudarymo būdas (2) ir simplekso judėjimo taisyklės (3)-(6) garantuoja: a) sveikaisiais skaičiais išreikštas viršūnių koordinates (kai L_k išreikštas sveikuoju skaičiumi); b) ribotą simplekso orientacijų erdvėje E^k skaičių (2^k).

Būdingos simplekso orientacijos

Galimų simplekso postūmio krypčių skaičius erdvėje E^k yra ribotas ir lygus [2]

$$K = 4k(k-1).$$

Galimos šios būdingos simplekso orientacijos, atsižvelgiant į *grad Q* kryptį (1, 2 pav.):

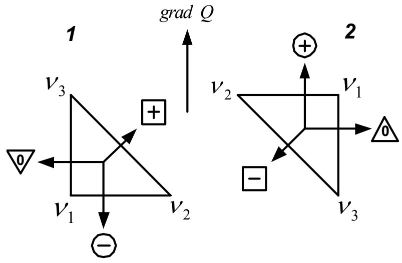
1) gradientas nukreiptas nuo viršūnės v_1 į bet kurią iš likusių viršūnių;

2) gradientas nukreiptas nuo bet kurios viršūnės (išskyrus v_1) į viršūnę v_1;

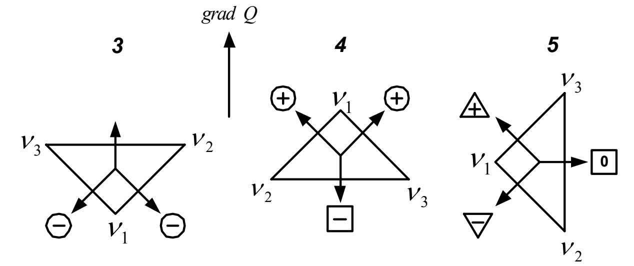
3) gradientas nukreiptas nuo viršūnės v_1 į simplekso centrą;

4) gradientas nukreiptas nuo centro į viršūnę v_1;

5) gradientas kolinearus su simplekso briauna, kuri neišeina iš viršūnės v_1.



1 pav. Stačiakampio simplekso orientacijos 1 ir 2 *grad Q* krypties atžvilgiu (k=2)



2 pav. Stačiakampio simplekso orientacijos 3, 4 ir 5 *grad Q* krypties atžvilgiu (k=2)

Taisyklingų paieškos žingsnių projekcijų *grad Q* kryptimi moduliai dėl orientacijų 1, ..., 5 yra [2]:

$$\lambda'_{t1} = \frac{1}{k+1} L_k;$$

$$\lambda'_{r2} = \frac{2}{k+1} L_k;$$

$$\lambda'_{t3} = \frac{2(k-1)}{\sqrt{k}(k+1)} L_k;$$

$$\lambda'_{r4} = \lambda'_{r5} = \frac{2}{\sqrt{k}(k+1)} L_k .$$

Maksimalus vidutinis simplekso judėjimo greitis išilgai *grad Q* krypties pasiekiamas, kai pradinis simpleksas atitinka 1-ąją arba 2-ąją orientaciją, minimalus vidutinis greitis pasiekiamas, kai pradinis simpleksas atitinka 3-iąją, 4-ąją arba 5-ąją orientaciją.

Paieškos statistinės charakteristikos

Tarkime, kad optimizuojamas objekto rodiklis apibūdinamas lygtimi

$$y = Q(x) + \varepsilon; \tag{7}$$

čia y ir Q – stebimoji ir tikroji optimizavimo rodiklio vertės; ε – trukdis, kurio dispersija σ^2.

Stačiakampės simpleksinės paieškos statistinių charakteristikų analizei kopimo etape panaudosime dviryšes Markovo grandines.

Dviryšė Markovo grandinė, aprašanti tikimybines paieškos, esant uždraustam grįžimui, savybes, kai k=2 ir pradinis simpleksas atitinka pirmąją orientaciją, turi 12 sudėtingų būsenų. Stochastiniame grafe tokios grandinės (3 pav.) sudėtingos būsenos pavaizduotos stačiakampiais, kuriuose įrašyti paprastų būsenų žymėjimai, nurodyti 1 pav. Pavyzdžiui, sudėtinga būsena 2 (3 pav.) yra taisyklingas žingsnis atmetant viršūnę v_1 po taisyklingo žingsnio, padaryto atmetant viršūnę v_r, $r \neq 1$.

Surasime pereinamąsias tikimybes pagal aprašytą metodiką [1]. Pereinamąsias tikimybes p_{12} ir p_{31} užrašysime kaip sąlygines tikimybes:

$$p_{12} = P\{(\eta_1 > 0) \mid (\eta_2 > -A)\},$$

$$p_{31} = P\{(\eta_2 > -A) \mid (\eta_3 > -A)\};$$

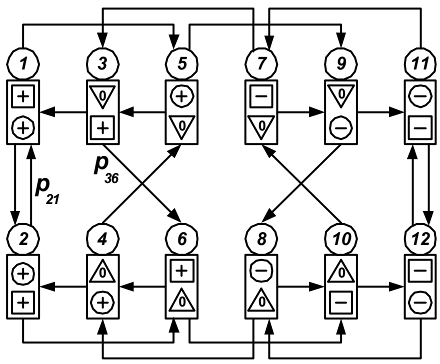
čia $\eta_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\eta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\eta_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$, $\sigma_\eta^2 = 2\sigma^2$.

Pereinamąją tikimybę ir jai analogiškas tikimybes surasime iš formulės

$$p_{12} = \left[\int_0^\infty \int_{-A}^\infty f_{12}(\eta'_1 \eta'_2) d\eta'_1 d\eta'_2 \right] / \int_{-A}^\infty f_2(\eta'_2) d\eta'_2 ;$$

čia $A = |gradQ| L_k$; f_{12} – atsitiktinių dydžių η_1 ir η_2 simultaninis pasiskirstymo tankis; f_2 – atsitiktinio dydžio η_2 pasiskirstymo tankis; η'_i – atsitiktinių dydžių η_i einamosios vertės.

Taikydami šią metodiką surandame ir kitas perėjimo tikimybes.



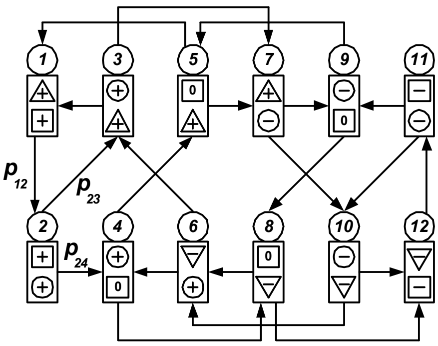
3 pav. Dviryšė Markovo grandinė, aprašanti paiešką, kai pradinis simpleksas atitinka 1-ąją orientaciją

Nagrinėjamoje sistemoje paieškos metu nusistovi atsitiktinis stacionarus būsenų pakeitimo procesas, apibūdinamas absoliučiomis ribinėmis tikimybinėmis p_1, p_2,..., p_ψ (ψ – Markovo grandinės sudėtingų būsenų skaičius). Jos surandamos iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} p_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\psi} p_{\alpha\beta}, \beta = 1,...,\psi - 1; \\ \sum_{\alpha=1}^{\psi} p_\alpha = 1. \end{cases}$$

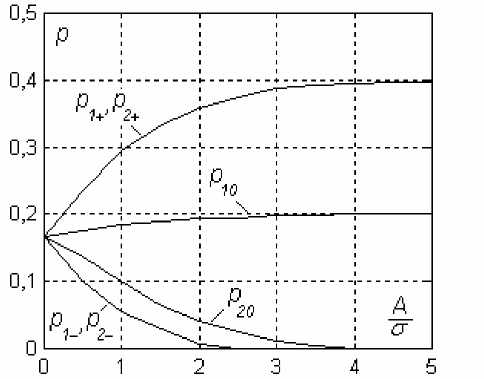
Absoliučios taisyklingų, nulinių ir klaidingų paieškos žingsnių tikimybės surandamos sumuojant sudėtingųjų būsenų tikimybes p_1,..., p_{12} su vienodomis paskutinėmis paprastosiomis būsenomis.

Analogiškai sudarome stochastinį grafą (4 pav.) ir atliekame paieškos statistinių charakteristikų tyrimą atvejui, kai pradinis simpleksas atitinka trečiąją stačiakampio simplekso orientaciją (2 pav.)

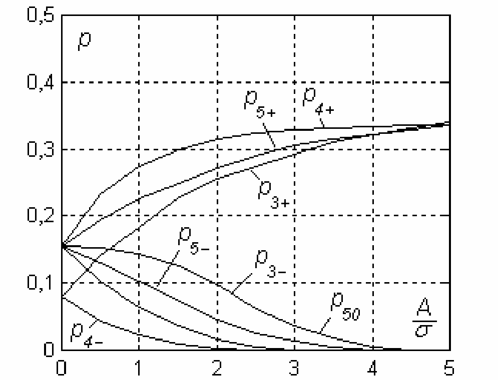


4 pav. Dviryšė Markovo grandinė, aprašanti paiešką, kai pradinis simpleksas atitinka 3-iąją orientaciją

Paieškos žingsnių tikimybių priklausomybės nuo trukdžių lygio, apskaičiuotos pagal anksčiau aprašytą metodiką, kai pradinis simpleksas atitinka pirmąją stačiakampio simplekso orientaciją (1 pav.), o trukdis – normuotas atsitiktinis dydis su nuline matematine viltimi ir dispersija $\sigma^2 = 1$, pavaizduotos 5 pav. Analogiškos tikimybės trečiajai simplekso orientacijai (2 pav.) pavaizduotos 6 pav.



5 pav. Stačiakampės sipleksinės paieškos tikimybių p_{1+}, p_{2+}, p_{10}, p_{20}, p_{1-}, p_{2-} priklausomybės nuo trukdžių lygio



6 pav. Stačiakampės sipleksinės paieškos tikimybių p_{3+}, p_{4+}, p_{5+}, p_{50}, p_{3-}, p_{4-}, p_{5-}, priklausomybės nuo trukdžių lygio

Paieškos žingsnių tikimybės leidžia įvertinti optimizavimo greitaeigiškumą – simplekso centro postūmio link tikslo per vieną žingsnį matematinę viltį [1]

$$M[\Lambda] = \sum_{i=1}^{\gamma} g_i p_i\,; \qquad (8)$$

čia Λ – simplekso centro poslinkis *grad Q* kryptimi; g_i – galimos atsitiktinio dydžio Λ vertės; p_i – paieškos žingsnių tikimybės.

Stačiakampės simpleksinės paieškos algoritmas, esant uždraustam grįžimui, ištirtas eksperimentiškai – pagal algoritmą sudaryta kompiuterinė paieškos proceso modeliavimo programa. Tiriamojo objekto modelis sudarytas pagal (7) lygtį; trukdis – atsitiktinis dydis su nuline matematine viltimi ir dispersija $\sigma^2 = 1$. Paieška ištirta darant 10000 paieškos žingsnių kiekvienai trukdžių lygio vertei. Paieškos žingsnių tikimybių vertės apskaičiuotos pagal formules

$$p_{i+} = \frac{n_{i+}}{N}, \qquad (9)$$

$$p_{i-} = \frac{n_{i-}}{N}; \qquad (10)$$

čia n_{i+}, n_{i-} – paieškos žingsnių $i+$ ir $i-$ skaičiai.

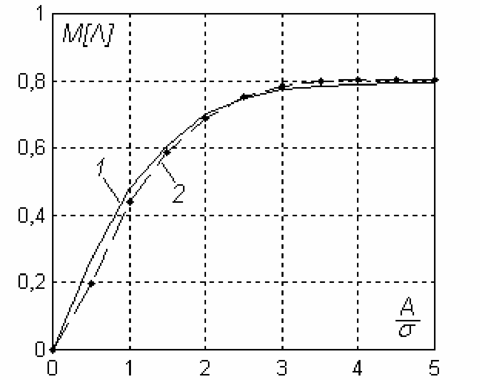
Simplekso centro postūmio link tikslo per vieną žingsnį matematinė viltis apskaičiuota pagal (8) taip, kad vidutinis postūmis aplinkoje be trukdžių vienam žingsniui būtų lygus 1. Esant pirmajai pradinio simplekso orientacijai, tai atitinka briaunos dydį $L_k = 2$:

$$M[\Lambda] = \frac{2}{3}\left[p_{1+} + 2p_{2+} - 2p_{1-} - p_{2-}\right]. \qquad (11)$$

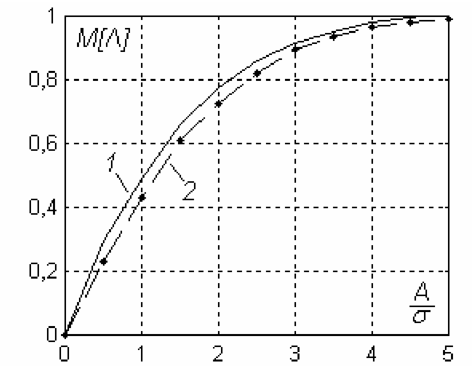
Esant trečiajai pradinio simplekso orientacijai, tai atitinka briaunos dydį $L_k = 3/\sqrt{2}$:

$$M[\Lambda] = p_{3+} + p_{4+} + p_{5+} - p_{3-} - p_{4-} - p_{5-}. \qquad (12)$$

Matematinės vilties skaičiavimo rezultatai pateikti 7 ir 8 pav.



7 pav. Simplekso centro postūmio link tikslo per vieną žingsnį matematinės vilties teorinė (1 kreivė) ir eksperimentinė (2 kreivė) priklausomybės nuo trukdžių lygio, kai pradinis simpleksas atitinka 1-ąją orientaciją



8 pav. Simplekso centro postūmio link tikslo per vieną žingsnį matematinės vilties teorinė (1 kreivė) ir eksperimentinė (2 kreivė) priklausomybės nuo trukdžių lygio, kai pradinis simpleksas atitinka 3-iąją orientaciją

Lyginant (11) ir (12) charakteristikas su analogiška charakteristika, gauta taikant reguliarųjį simpleksą [1], galima pastebėti stačiakampės simpleksinės paieškos pranašumą esant dideliam trukdžių lygiui.

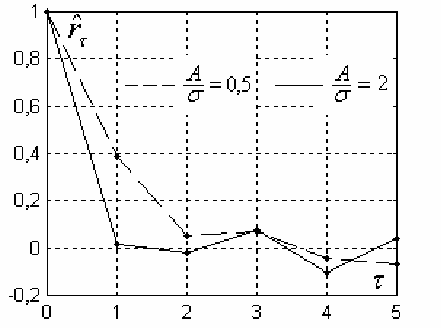
Panaudojant modeliavimo duomenis, buvo apskaičiuoti koreliacinio momento įverčiai:

$$\hat{K}_\tau = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-\tau}\left(\Lambda_n - \overline{\Lambda}\right)\left(\Lambda_{n+\tau} - \overline{\Lambda}\right),\ \tau = 0,1,2,...; \qquad (13)$$

čia $\overline{\Lambda}$ – vidutinė dydžio Λ vertė.

Ir koreliacijos koeficiento dydžiai

$$\hat{r}_\tau = \frac{\hat{K}_\tau}{\hat{K}_0}.$$



9 pav. Koreliacijos koeficiento priklausomybė nuo skaičiaus τ, kai pradinis simpleksas atitinka 1-ąją orientaciją

Nustatyta, kad didžiausias koreliacinis ryšys jungia gretutinius paieškos žingsnius (τ=1); didėjant skaičiui τ, šis ryšys silpnėja.

Išvados

Stačiakampės simpleksinės paieškos greitaveika kopimo etape didelių trukdžių aplinkoje yra didesnė negu taikant reguliarųjį simpleksą. Tačiau kai trukdžiai maži, reguliaraus simplekso paieškos efektyvumas yra didesnis negu stačiakampės simpleksinės paieškos esant pirmajai pradinio simplekso orientacijai, kadangi tuomet yra didelė stačiakampio simplekso nulinių žingsnių tikimybė.

Stačiakampės simpleksinės paieškos metu didžiausias koreliacinis ryšys jungia gretutinius paieškos žingsnius, todėl paieškos procesą galima pakankamai tiksliai aprašyti taikant dviryšes Markovo grandines.

Paieškos procesų trukdžių aplinkoje modeliavimo rezultatai patvirtina teorines statistines charakteristikas.

Literatūra

1. **Dambrauskas A.** Simpleksinės paieškos metodai. – Vilnius: Technika, 1995. – 230 p.
2. **Дамбраускас А. П., Латышенок К. И.** Оптимизация методом прямоугольного симплекса // Тезисы докладов научн.- техн. конф. „Вероятностные методы и средства“. – Новгород: НПИ, 1983. – С. 96-99.
3. **Горский В. Г., Адлер Ю. П.** Планирование промышленных экспериментов. – М.: Металлургия, 1974. – 265 с.
4. **Дамбраускас А. П., Кащеев В. А., Кошаев О. В.** Перспективные направления синтеза алгоритмов симплексного поиска // Оптимизация режимов работы систем электроприводов. – Красноярск: КПИ, 1982. – С. 148-156.

Pateikta spaudai 2004 01 22

A. Dambrauskas, V. Rinkevičius. Stačiakampės simpleksinės paieškos statistinės charakteristikos // Elektronika ir elektrotechnika. – Kaunas: Technologija, 2004. – Nr. 2(51). – P. 64-67.

Išdėstytos stačiakampio simplekso sudarymo ir jo judėjimo taisyklės, taip pat stačiakampės simpleksinės paieškos pagrindai. Nurodytos tokios paieškos teigiamybės, kurios leidžia apriboti simplekso orientacijų skaičių ir spręsti matematinio programavimo su sveikaisiais skaičiais uždavinius. Atlikta stačiakampės simpleksinės paieškos statistinių savybių analizė, taikant daugiaryšes Markovo grandines. Tuo tikslu sudarytos dviryšės Markovo grandinės, leidžiančios aprašyti stačiakampės simpleksinės paieškos savybes kopimo etape trukdžių aplinkoje, sukurta simpleksinės paieškos statistinių charakteristikų skaičiavimo metodika. Gautos teorinės statistinės charakteristikos – paieškos žingsnių tikimybės, simplekso centro poslinkio link tikslo matematinė viltis ir kt. – leidžia įvertinti simpleksinės paieškos, naudojant stačiakampį simpleksą, greitaveiką kopimo etape, atskleisti jos savybes. Teorines statistines charakteristikas patvirtina paieškos procesų trukdžių aplinkoje modeliavimo rezultatai. Tyrimo išvados ir rezultatai gali būti panaudoti kuriant naujus efektyvius simpleksinės paieškos algoritmus. Il. 9, bibl. 4 (lietuvių kalba; santraukos lietuvių, anglų ir rusų k.)

A. Dambrauskas, V. Rinkevičius. Statistical Characteristics of Rectangular Simplex Search // Electronics and Electrical Engineering. – Kaunas: Technologija, 2004. – No. 2(51). – P. 64-67.

Rules of constructing rectangular simplex, its motion rules and basics of rectangular simplex search were presented. Advantages of such search, which let limiting the number of orientations of simplex and give a possibility for solving problems with programming with whole numbers were indicated. The analysis of statistical characteristics of rectangular simplex search was made using multiple Markov chains. Double Markov chains describing properties of rectangular simplex search in the climbing stage were designed, simplex search statistical characteristics calculating methodic was created. Theoretical statistical characteristics – probabilities of search steps, mathematical expectancy of shift of the simplex center towards the aim – which let us evaluate the velocity of rectangular simplex search in the climbing stage and reveal its features were obtained. Theoretical characteristics are confirmed by the results of modeling the search. The results and conclusions of the research can be used in creating new efficient algorithms of simplex search. Ill. 9, bibl. 4 (in Lithuanian; summaries in Lithuanian, English and Russian).

А. Дамбраускас, В. Ринкявичус. Статистические характеристики прямоугольного симплексного поиска // Электроника и электротехника. – Каунас: Технология, 2004. – № 2(51). – С. 64-67.

Изложены правила построения и движения прямоугольного симплекса, а также основы прямоугольного симплексного поиска. Рассмотрены достоинства такого поиска, которые позволяют ограничить число ориентаций симплекса, и дают возможность решать задачи целочисленного программирования. Проведен анализ статистических свойств прямоугольного симплексного поиска с использованием многосвязных цепей Маркова. С этой целью созданы двухсвязные цепи Маркова, которые дают возможность описать свойства прямоугольного симплексного поиска на этапе восхождения в обстановке помех, создана методика расчета статистических характеристик симплексного поиска. Полученные теоретические вероятностные характеристики – вероятности шагов поиска, математическое ожидание смещения центра симплекса по направлению к цели и др., позволяют оценить быстродействие на этапе восхождения симплексного поиска с применением прямоугольного симплекса, выявить свойства этого поиска. Статистические характеристики, полученные теоретическим путем, подтверждают результаты моделирования процессов поиска в обстановке помех. Выводы и результаты исследования могут быть использованы при разработке новых эффективных алгоритмов симплексного поиска. Ил. 9, библ. 4 (на литовском языке; рефераты на литовском, английском и русском яз.).