ISSN 1392 - 1215 ELEKTRONIKA IR ELEKTROTECHNIKA. 2004. Nr.7(56)

Atrankinė kontrolė skaidant gaminius į du srautus

J. Kruopis
VU, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, Vilnius, Lietuva,
tel. +370 5 2136390, el. paštas julius.kruopis@maf.vu.lt
A.Vaišvila
AB „Ekranas", Elektronikos g. 1, LT-5319 Panevėžys, Lietuva,
tel. +370 45 506766, faksas +370 45 436563, el. paštas vaisvila@ekranas.lt

Įvadas

Šiuolaikinėse aukštos technologijos įmonėse yra nuolat papildomi ir saugomi dideli duomenų apie gaminamą produkciją ir technologijos procesą bankai. Pavyzdžiui, gamyklos „Ekranas" duomenų bazėse galima rasti gana išsamią kiekvieno kineskopo, pagaminto per pastaruosius penkerius metus, istoriją. Tokia informacija – tai kol kas nepakankamai panaudojamas rezervas, įgalinantis priimti labiau pagrįstus sprendimus gerinant produkcijos kokybę ir reguliuojant technologinius procesus.

Gamyklos „Ekrano" reklamacijų analizės skyrius nustatė, kad reklamuotų kineskopų aibėje yra kur kas daugiau tokių kineskopų, kurie gamybos metu buvo pripažinti blogais ir dėl to juos teko taisyti arba pakartotinai atlikti kai kurias technologines operacijas. Remiantis šia apriorine informacija, atsiranda galimybė išskirti tokius „įtartinus" gaminius į atskirą srautą ir pritaikyti jiems sugriežtintą išleidžiamosios kontrolės planą. Galima tikėtis, kad tokiu atveju gamykloje bus aptikta didesnė dalis blogų gaminių, negu taikant vienodą taisyklę visam jungtiniam srautui, ir reklamacijų procentas sumažės. Dabar gamykloje „Ekranas" yra atliekamas toks technologinis eksperimentas.

Šiame darbe sukurtas išleidžiamosios atrankinės kontrolės matematinis modelis, kai gaminiai skaidomi į du srautus ir kai atliekama vienoda viso jungtinio gaminių srauto kontrolė. Remiantis matematiniu modeliu, skaitinio modeliavimo ESM būdu parodoma, kad apriorinę informaciją tikslinga panaudoti gaminiams suskaidyti į srautus.

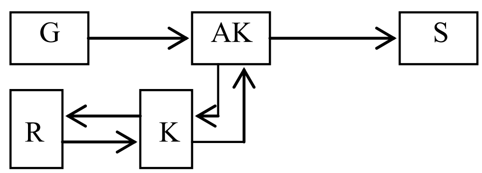
Matematinis modelis

Nagrinėsime tokią gamybos ir po jos atliekamos išleidžiamosios atrankinės kontrolės schemą, taikomą Panevėžio gamykloje „Ekranas" (žr. [1]).

Ši schema veikia taip:

1. Gamybos G operacijos metu gaminami gaminiai ir komplektuojami į dydžio N partijas, kurios patenka į atrankinę kontrolę (AK).

2. Atrankinės kontrolės metu iš gautos dydžio N partijos atsitiktinai, be grąžinimo atrenkama ir patikrinama n gaminių. Priklausomai nuo tikrinimo rezultatų partija gali būti pripažinta gera ir atiduota į sandėlį S arba pripažįstama bloga ir siunčiama į pertikrinimo operaciją K. Atiduodamų į sandėlį partijų imtyje surasti blogi gaminiai pakeičiami gerais.



1 pav. Atrankinės išleidžiamosios kontrolės schema

3. Kontrolės K metu tikrinami visi gauti gaminiai. Iš gerais pripažintų gaminių pradedama formuoti nauja partija. Pripažinti blogais gaminiai patenka į remonto operaciją R. Jei gaminį pavyksta suremontuoti, tai jis patenka į naujai formuojamą partiją. Neremontuotini gaminiai patenka į regeneraciją, o vietoj jų į partiją įdedami geri gaminiai. Šitaip suformuota partija patenka į atrankinę kontrolę ir tikrinama taip pat kaip ir partijos, patekusios iš gamybos.

Sakykime, kad operacijoje G pagaminto gaminio kokybę apibūdina parametrų vektorius $\mathbf{X}$, kurio koordinatės suskirstytos į dvi parametrų grupes $\boldsymbol{X}_1$ ir $\boldsymbol{X}_2$. Gaminys laikomas geru, jei $\boldsymbol{X}_1 \in \mathcal{G}_1$ ir $\boldsymbol{X}_2 \in \mathcal{G}_2$, ir blogu, jei nors viena iš šių sąlygų netenkinama.

Tarkim, remiantis tam tikra iš gamybos gauta informacija, gaminiai po operacijos G skaidomi į du srautus: pirmajame sraute dalis gaminių, kuriems galioja sąlyga $\boldsymbol{X}_1 \notin \mathcal{G}_1$, t. y. dalis blogų pagal pirmąją parametrų grupę gaminių, yra žymiai mažesnė negu antrajame sraute. Jeigu šiems dviem srautams taikysime skirtingas kontrolės taisykles, parinktas atsižvelgiant į turimą informaciją, tai natūralu tikėtis, kad kontrolės efektyvumas bus didesnis negu tuo atveju, kai kontroliuojamas jungtinis srautas.

Nagrinėsime tokį atrankinės kontrolės plano pakeitimą: pirmajam srautui taikysime atrankinę kontrolę pagal aprašytą schemą; antrąjį srautą iš karto nukreipsime į pertikrinimo operaciją K, t. y. pirmąjį kartą aplenksime atrankinę kontrolę AK, o toliau partijos bus tikrinamos pagal aprašytas taisykles.

Norint ištirti kontrolės efektyvumą, reikia sukonstruoti aprašytos sistemos matematinį modelį.

Po operacijos G gaminys gali būti vienos iš keturių būsenų: blogas pagal abi parametrų grupes $(\boldsymbol{X}_1 \notin \mathcal{G}_1, \boldsymbol{X}_2 \notin \mathcal{G}_2)$; blogas pagal pirmąją, tačiau geras pagal antrąją $(\boldsymbol{X}_1 \notin \mathcal{G}_1, \boldsymbol{X}_2 \in \mathcal{G}_2)$; geras pagal pirmąją, tačiau blogas pagal antrąją $(\boldsymbol{X}_1 \in \mathcal{G}_1, \boldsymbol{X}_2 \notin \mathcal{G}_2)$ ir pagaliau, geras gaminys $(\boldsymbol{X}_1 \in \mathcal{G}_1, \boldsymbol{X}_2 \in \mathcal{G}_2)$.

Sakykim, kad atsitiktinio vektoriaus (a.v.) **X** skirstinys priklauso nuo parametro $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}(t)=(\theta_1, \theta_2)$, apibūdinančio technologinio proceso svyravimą kintant laikui t. Tarkime, išvardytų keturių gaminio būsenų tikimybės, esant fiksuotam θ, yra tokios:

$$p_{11} = \theta_1\theta_2, \quad p_{10} = \theta_1(1-\theta_2),$$
$$p_{01} = (1-\theta_1)\theta_2, \quad p_{00} = (1-\theta_1)(1-\theta_2). \tag{1}$$

Savo ruožtu $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_2)$ yra a.v., kurio apriorinis skirstinys nusakytas tankiu $g(\theta_1, \theta_2)$:

$$(\theta_1, \theta_2) \sim g(\theta_1, \theta_2); \quad \int_0^1\int_0^1 g(\theta_1, \theta_2)d\theta_1 d\theta_2 = 1. \tag{2}$$

Gamybos ir po jos einančios atrankinės kontrolės funkcionavimą formalizuokime taip:

1. Generuojame $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_2)$ vertę, remdamiesi skirstiniu (2).

2. Tarkime, kad per tą laiką, kol pagaminama dydžio N partija, parametras $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_2)$ nekinta; esant fiksuotam $\boldsymbol{\theta}$, gamybą interpretuojame kaip a.v. **X** nepriklausomų realizacijų generavimą. Tada blogų pagal abi parametrų grupes gaminių skaičius $\mathcal{D}_{11}$, blogų pagal pirmąją grupę, tačiau gerų pagal antrąją skaičius $\mathcal{D}_{10}$ ir gerų pagal pirmąją, tačiau blogų pagal antrąją skaičius $\mathcal{D}_{01}$ dydžio N gaminių partijoje, pagamintoje esant fiksuotai $\boldsymbol{\theta}$ vertei, turės polinominį skirstinį:

$$\mathcal{D} = (\mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{01}) \sim \mathcal{P}_3(N; p_{11}, p_{10}, p_{01});$$
$$\mathbf{P}\{\mathcal{D} = \mathbf{D} \mid \boldsymbol{\theta}\} = \mathbf{P}\{\mathcal{D}_{ij} = D_{ij}, i, j = 0,1 \mid \boldsymbol{\theta}\} =$$
$$= \frac{N![p_{11}(\boldsymbol{\theta})]^{D_{11}}[p_{10}(\boldsymbol{\theta})]^{D_{10}}[p_{01}(\boldsymbol{\theta})]^{D_{01}}[p_{00}(\boldsymbol{\theta})]^{D_{00}}}{D_{11}!D_{10}!D_{01}!D_{00}!}.$$
$$D_{00} = N - D_{11} - D_{10} - D_{01};$$
$$p_{00}(\boldsymbol{\theta}) = 1 - p_{11}(\boldsymbol{\theta}) - p_{10}(\boldsymbol{\theta}) - p_{01}(\boldsymbol{\theta}).$$

Blogų gaminių dalis (vidutinis defektingumo lygis) po operacijos G yra tokia:

$$q_1 = \mathbf{M}\frac{\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10} + \mathcal{D}_{01}}{N} =$$
$$= \mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}}[p_{11}(\boldsymbol{\theta}) + p_{10}(\boldsymbol{\theta}) + p_{01}(\boldsymbol{\theta})] = \mu_1 + \mu_2 - \mu_{12}; \tag{3}$$
$$\mu_i = \mathbf{M}\theta_i, i = 1,2; \quad \mu_{12} = \mathbf{M}\theta_1\theta_2.$$

Analogiškai gauname vidutinius defektingumo lygius pagal atskiras parametrų grupes:

$$q_{11} = \mathbf{M}\frac{\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}}{N} = \mu_1, \quad q_{12} = \mathbf{M}\frac{\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{01}}{N} = \mu_2. \tag{4}$$

3. Atrankinės kontrolės metu iš gautos dydžio N partijos atsitiktinai, be grąžinimo atrenkame n gaminių ir užregistruojame vektoriaus $\mathbf{Y} = (Y_{11}, Y_{10}, Y_{01})$ vertę; čia Y_{ij} – skaičius gaminių, patekusių iš grupės $\mathcal{D}_{ij}; i, j = 1,0.$ Kai $\boldsymbol{\theta}$ vertė fiksuota, a.v. **Y** irgi turi polinominį skirstinį:

$$(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}) = (Y_{11}, Y_{10}, Y_{01} \mid \boldsymbol{\theta}) \sim \mathcal{P}_3(n; p_{11}(\boldsymbol{\theta}), p_{10}(\boldsymbol{\theta}), p_{01}(\boldsymbol{\theta})); \tag{5}$$

Kad galėtume nuspręsti, kokioms a.v. **Y** vertėms esant partiją reikia pripažinti gera, apskaičiuokime partijų, kurių a.v. **Y** vertė yra fiksuota, vidutinį defektingumo lygį Kadangi į sandėlį siunčiamose partijose blogi gaminiai yra pakeičiami gerais, tai blogų pagal abi parametrų grupes gaminių skaičius yra $\mathcal{D}_{11} - Y_{11}$; blogų pagal pirmąją ir gerų pagal antrąją – $\mathcal{D}_{10} - Y_{10}$; gerų pagal pirmąją ir blogų pagal antrąją $-\mathcal{D}_{01} - Y_{01}$; partijos dydis N. Pažymėkime $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10} + \mathcal{D}_{01}$; $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}$; $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{01}$; $Y = Y_{11} + Y_{10} + Y_{01}$; $Y_1 = Y_{11} + Y_{10}$; $Y_2 = Y_{11} + Y_{01}$.

Gauname (žr. [2])

$$q_1(m) = \mathbf{M}\left(\frac{\mathcal{D} - Y}{N}\middle| Y = m\right) =$$
$$= \frac{N-n}{N}\sum_D \frac{D-m}{N-n}\frac{\mathbf{P}\{Y = m \mid \mathcal{D} = D\}h(D)}{\mathbf{P}\{Y = m\}} =$$
$$= \frac{N-n}{N}\frac{m+1}{n+1}\frac{\sum_D h(m+1 \mid N, D, n+1)h(D)}{\sum_D h(m \mid N, D, n)h(D)} =$$
$$= \frac{N-n}{N}\frac{m+1}{n+1}\frac{\varphi(m+1 \mid n+1)}{\varphi(m \mid n)}, \tag{6}$$

čia $h(m \mid N,D,n)$ – hipergeometrinė tikimybė:

$$h(m \mid N, D, n) = \frac{C_D^m C_{N-D}^{n-m}}{C_N^n}; \quad h(D) = \mathbf{P}\{\mathcal{D} = D\},$$

o $\varphi(m|n)$ – tikimybė, kad a.d. Y įgijo vertę m, jeigu imties tūris lygus n:

$$\varphi(m \mid n) = \mathbf{P}\{Y = m \mid n\} = \sum_D h(m \mid N, D, n)h(D) =$$
$$= \int_0^1\int_0^1 C_n^m[1 - p_{00}(\boldsymbol{\theta})]^m[p_{00}(\boldsymbol{\theta})]^{n-m} g(\theta_1, \theta_2)d\theta_1 d\theta_2.$$

Analogiškai gauname vidutinius defektingumo lygius pagal atskiras parametrų grupes.

$$q_{11} = \mathbf{M}\left(\frac{\mathcal{D}_1 - Y_1}{N}\middle| Y_1 = m\right) = \frac{N-n}{N}\frac{m+1}{n+1}\frac{\varphi_1(m+1 \mid n+1)}{\varphi_1(m \mid n)},$$
$$q_{12} = \mathbf{M}\left(\frac{\mathcal{D}_2 - Y_2}{N}\middle| Y_2 = m\right) =$$
$$= \frac{N-n}{N}\frac{m+1}{n+1}\frac{\varphi_2(m+1 \mid n+1)}{\varphi_2(m \mid n)}; \tag{7}$$

čia $\varphi_i(m \mid n)$ – tikimybė, kad a.d. Y_i įgijo vertę m, kai imties tūris lygus n.

Defektingumo lygis $q_1(m)$ formulėje (6) yra apskaičiuotas tarus, kad yra žinoma tik suma $Y = Y_{11} + Y_{10} + Y_{01}$ Jeigu žinomos visos trys vektoriaus $\mathbf{Y}$ koordinatės, tai vidutinį suminį defektingumo lygį galima patikslinti:

$$q_1(\mathbf{m}) = q_1(m_{11}, m_{10}, m_{01}) =$$
$$= \mathbf{M}\left(\frac{\mathcal{D} - Y}{N}\middle| Y_{11} = m_{11}, \quad Y_{10} = m_{10}, \quad Y_{01} = m_{01}\right) =$$
$$= \{(m_{11}+1)\varphi(m_{11}+1, m_{10}, m_{01} \mid n+1) +$$
$$+(m_{10}+1)\varphi(m_{11}, m_{10}+1, m_{01} \mid n+1) +$$
$$+(m_{01}+1)\varphi(m_{11}, m_{10}, m_{01}+1 \mid n+1)\} /$$
$$/[(n+1)\varphi(m_{11}, m_{10}, m_{01} \mid n)],$$

čia $\varphi(m_{11}, m_{10}, m_{01} \mid n)$ - tikimybė, kad a.v. $\mathbf{Y}$ įgijo vertę $\mathbf{m} = (m_{11}, m_{10}, m_{01})$, kai imties tūris lygus n.

Galima įrodyti (žr.[3]), kad pateiktieji vidutiniai defektingumo lygiai yra monotoniškai didėjančios savo argumentų funkcijos. Todėl, jei norime minimizuoti suminį defektingumo lygį, o žinoma tik a.d. Y vertė, tai partijų priėmimo sritis turi būti tokio pavidalo:

$$G^* = G^*(d) = \{Y : Y \le d\}.$$

Jeigu norime kontroliuoti defektingumo lygius pagal atskiras parametrų grupes (daugiau ir mažiau svarbūs parametrai), tai partijų priėmimo sritis galėtų būti tokio pavidalo:

$$G^* = \{(Y_{11}, Y_{10}, Y_{01}) : Y_{11} + Y_{10} \le d_1, Y_{11} + Y_{01} \le d_2\}.$$

Jeigu žinomos visos vektoriaus $\mathbf{Y}$ koordinatės ir norime minimizuoti suminį defektingumo lygį, tai partijų priėmimo sritis turi tokį pavidalą:

$$G^*(c) = \{(Y_{11}, Y_{10}, Y_{01}) : q_1((Y_{11}, Y_{10}, Y_{01}) \le c)\}.$$

Bet kuriuo atveju galime apskaičiuoti partijų, patenkančių į sandėlį, srauto dydį

$$P_1^{(1)} = \mathbf{P}\{\mathbf{Y} \in G^*\}$$

ir suminį vidutinį defektingumo lygį šiame sraute (arba defektingumo lygius pagal atskiras parametrų grupes):

$$q_1^{(1)} = \mathbf{M}\left(\frac{\mathcal{D} - Y}{N}\middle|\mathbf{Y} \in G^*\right).$$

4. Jeigu partija pripažinta bloga, t. y. $\mathbf{Y} \notin G^*$, tai kontrolės K metu patikrinami visi gaminiai. Tarkime, kad pirmosios rūšies klaida (gerą gaminį pripažinti blogu) lygi nuliui. Antrosios rūšies klaida (blogą gaminį pripažinti geru) pirmosios grupės parametrams lygi β_1, o antrosios grupės parametrams – β_2. Atsižvelgę į tai, kad blogais pripažinti gaminiai tampa geri (yra suremontuojami arba pakeičiami gerais), gausime tokias gaminio būsenų tikimybes esant fiksuotam $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ (palyginkite su (1)):

$$p_{11}^*(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1\beta_1\theta_2\beta_2; \quad p_{10}^*(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1\beta_1(1-\theta_2),$$

$$p_{01}^*(\boldsymbol{\theta}) = (1-\theta_1)\theta_2\beta_2; \tag{8}$$
$$p_{00}^*(\boldsymbol{\theta}) = 1 - \theta_1\beta_1 - \theta_2\beta_2 + \theta_1\theta_2(\beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2).$$

Apskaičiuokime aposteriorinį a.v. $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ tankį, kai $\mathbf{Y} \notin G^*$, t. y. produkcijoje, patekusioje į pertikrinimo operaciją K: $(\theta_1, \theta_2 \mid \mathbf{Y} \notin G^*) \sim g^{(1)}(\theta_1, \theta_2)$,

$$g^{(1)}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\Sigma' \mathbf{P}\{\mathbf{Y} = \mathbf{m} \mid \boldsymbol{\theta}\} g(\theta_1, \theta_2)}{\int_0^1\int_0^1 \Sigma' \mathbf{P}\{\mathbf{Y} = \mathbf{m} \mid \boldsymbol{\theta}\} g(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2}; \tag{9}$$

čia Σ' reiškia, kad sumuojama pagal tokius $\mathbf{m} = (m_{11}, m_{10}, m_{01})$, kuriems $\mathbf{m} \notin G^*$.

Partijoms, pakartotinai patekusioms į atrankinę kontrolę po pertikrinimo ir remonto operacijų, taikomos tos pačios taisyklės, kaip ir partijoms, patekusioms iš gamybos. Todėl visos gautos formulės išlieka atlikus akivaizdžius pakeitimus: srauto dydis ne 1, o $Q_1^{(1)} = 1 - P_1^{(1)}$; vietoje tankio $g(\theta_1, \theta_2)$ iš (1) reikia imti tankį $g^{(1)}(\theta_1, \theta_2)$ iš (9); tikimybes $p_{ij}(\boldsymbol{\theta})$ iš (2) reikia pakeisti tikimybėmis $p_{ij}^*(\boldsymbol{\theta})$ iš (8):

$$P_1^{(2)} = \mathbf{P}\{\mathbf{Y}^{(2)} \in G^*\}, \quad q_1^{(2)} = \mathbf{M}\left(\frac{\mathcal{D}^{(2)} - Y^{(2)}}{N}\middle|\mathbf{Y}^{(2)} \in G^*\right); \tag{10}$$

čia $\mathcal{D}^{(2)}$, $Y^{(2)}$, $\mathbf{Y}^{(2)}$ reiškia tą patį, kaip ir $\mathcal{D}$, Y, $\mathbf{Y}$ pirmajame kontrolės etape.

Procedūra kartojama tol, kol partija bus pripažinta gera ir pateks į sandėlį.

Vidutinis į sandėlį patekusios produkcijos defektingumo lygis

$$q_1 = q_1^{(1)}P_1^{(1)} + q_1^{(2)}P_1^{(2)}Q_1^{(1)} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} q_1^{(i)}P_1^{(i)} \prod_{j=0}^{i-1} Q_1^{(j)}; \tag{11}$$

$$Q_1^{(j)} = 1 - P_1^{(j)}, \quad j = 1,2,\ldots; \quad Q_1^{(0)} = 1.$$

Grįžkime prie pradinio uždavinio apie produkcijos suskaidymą į du srautus. Atliktą analizę galime interpretuoti kaip pagrindinio srauto, kurio kontrolės sistema nekeičiama, kontrolės funkcionavimo analizę.

Sugriežtinta kontrolė

Antrajam srautui, kuriame pagal pirmąją parametrų grupę defektingų gaminių dalis didesnė, taikomas kontrolės planas aplenkiant pirmąjį atrankinės kontrolės ciklą. Tiksliau sakant, gaminiai po gamybos operacijos G iš karto patenka į pertikrinimo ir remonto operacijas. Po to kontrolės sistema funkcionuoja taip, kaip ir pirmojo srauto gaminių.

Tarkime, kad antrojo srauto gaminių, kurių a.v. $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, skirstinio tankis yra $\tilde{g}(\theta_1, \theta_2)$ ir

$$\tilde{\mu}_1 = \int_0^1\int_0^1 \theta_1 \tilde{g}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 > \mu_1.$$

Aišku, kad pirmiau pateiktos formulės išlieka atlikus šiuos pakeitimus: vietoj $Q_1^{(1)}$ įrašius 1; o vietoj tankio $g^{(1)}(\theta_1,\theta_2)$ paėmus tankį $\widetilde{g}(\theta_1,\theta_2)$. Gauname (10) formulių analogus:

$$\widetilde{P}_2^{(2)} = \mathbf{P}\{\widetilde{\mathbf{Y}}^{(2)} \in G^*\}, \quad \widetilde{q}_2^{(2)} = \mathbf{M}\left(\frac{\widetilde{\mathcal{D}}-\widetilde{Y}}{N}\middle|\widetilde{\mathbf{Y}} \in G^*\right);$$

čia $\widetilde{\mathcal{D}}$, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{\mathbf{Y}}$ yra $\mathcal{D}$, Y, $\mathbf{Y}$ iš pirmojo srauto analogai.

Vidutinis produkcijos, patekusios į sandėlį iš antrojo srauto, defektingumo lygis yra

$$\widetilde{q}_2 = \widetilde{q}_2^{(2)}\widetilde{P}_2^{(2)} + \widetilde{q}_2^{(3)}\widetilde{P}_2^{(3)}\,\widetilde{Q}_2^{(2)} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{q}_2^{(i)}\widetilde{P}_2^{(i)}\prod_{j=0}^{i-1}\widetilde{Q}_2^{(j)};$$

$$\widetilde{Q}_2^{(j)} = 1-\widetilde{P}_2^{(j)}, \quad j = 2,3,\ldots; \quad Q_2^{(1)} = 1. \qquad (12)$$

Tarkime, kad pirmojo srauto apimtis yra α, o antrojo 1-α. Tada į sandėlį patekusios produkcijos defektingumo lygis, kai taikomos skirtingos kontrolės taisyklės dviem srautams, gaunamas iš (11) ir (12):

$$q = \alpha q_1 + (1-\alpha)\widetilde{q}_2.$$

Jungtinis srautas

Jeigu nagrinėtume jungtinį srautą, kai partijos komplektuojamos neatsižvelgiant į papildomą informaciją, tai kontrolės matematinis modelis gaunamas analogiškai atlikus tokius pakeitimus.

Gaminio būsenų tikimybes iš (1) reikia pakeisti tokiomis:

$$p_{11}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = \theta_1\theta_2\alpha + \widetilde{\theta}_1\widetilde{\theta}_2(1-\alpha);$$
$$p_{10}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = \theta_1(1-\theta_2)\alpha + \widetilde{\theta}_1(1-\widetilde{\theta}_2)(1-\alpha);$$
$$p_{01}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = (1-\theta_1)\theta_2\alpha + (1-\widetilde{\theta}_1)\widetilde{\theta}_2(1-\alpha);$$
$$p_{00}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = 1-p_{11}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}})-p_{10}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}})-p_{01}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}});$$

čia $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\theta_2)$ ir $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{\theta}_1,\widetilde{\theta}_2)$ yra n.a.v. su aprioriniais skirstiniais, nusakytais tankiais $g(\theta_1,\theta_2)$ ir $\widetilde{g}(\widetilde{\theta}_1,\widetilde{\theta}_2)$, kurie turi tą pačią prasmę kaip ir tankis iš (2).

Būsenų tikimybes iš (8) reikia pakeisti taip:

$$p_{11}^*(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = p_{11}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\beta_1\beta_2; \quad p_{10}^*(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = p_{10}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\beta_1;$$
$$p_{01}^*(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = p_{01}(\boldsymbol{\theta},\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\beta_2.$$

Atlikus šiuos pakeitimus, visos kitos formulės išlieka.

Pavyzdys

Panagrinėsime konkretų atvejį, kai daugelį atsakymų galima užrašyti paprastu išreikštiniu pavidalu. Kadangi a. d. θ_1 ir θ_2 kinta intervale [0,1], tai juos natūralu aprašyti beta skirstiniu, kurio tankis priklausomai nuo parametrų gali įgyti labai įvairias formas. Tarkime, kad a. d. θ_1 ir θ_2 yra nepriklausomi ir $\theta_i \sim Be(\gamma_i,\eta_i)$. Tada tankis iš (2) turi tokį pavidalą:

$$g(\theta_1,\theta_2) = f(\theta_1 \mid \gamma_1,\eta_1)f(\theta_2 \mid \gamma_2,\eta_2),$$
$$f(\theta \mid \gamma_i,\eta_i) = \frac{\Gamma(\gamma_i+\eta_i)}{\Gamma(\gamma_i)\Gamma(\eta_i)}\theta^{\gamma_i-1}(1-\theta)^{\eta_i-1}, \quad i = 1,2.$$

Gauname vidutinius defektingumo lygius (3) ir (4):

$$q_1 = \mu_1+\mu_2-\mu_1\mu_2, \quad q_{11} = \mu_1, \quad q_{12} = \mu_2,$$
$$\mu_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\eta_1}, \quad \mu_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_2+\eta_2}.$$

Atsitiktiniai dydžiai $Y_1 = Y_{11}+Y_{10}$ ir $Y_2 = Y_{11}+Y_{01}$ turi vadinamąjį apibendrintą binominį skirstinį, todėl $\varphi_i(m \mid n)$ iš (6) įgyja tokį pavidalą:

$$\varphi_i(m \mid n) = C_n^m\frac{(\gamma_i+m)^{[m]}(\eta_i+n-m)^{[n-m]}}{(\gamma_i+\eta_i+n)^{[n]}}; \quad i = 1,2;$$

$$(d+k)^{[k]} = d(d+1)\ldots(d+k-1).$$

Gauname:

$$q_{11}(m) = \frac{N-n}{N}a_1(m)(1+a_2(m));$$
$$q_{12}(m) = \frac{N-n}{N}a_2(m)(1+a_1(m));$$
$$q_1(m_{11},m_{10},m_{01}) = \frac{N-n}{N}(a_1(m_1)+a_2(m_2)+$$
$$+a_1(m_1)a_2(m_2));$$
$$a_i(m) = \frac{\gamma_i+m}{\gamma_i+\eta_i+n}; \quad i = 1,2;$$
$$m_1 = m_{11}+m_{10}, \quad m_2 = m_{11}+m_{01}.$$

Kaip matome, $q_1(m_{11},m_{10},m_{01})$ priklauso tik nuo m_1 ir m_2, t. y. visus taškus (m_{11},m_{10},m_{01}), kuriems $m_1 = m_{11}+m_{10}$ ir $m_2 = m_{11}+m_{01}$, arba reikia įtraukti į priėmimo sritį G^*, arba nereikia.

Tarkime, kad priėmimo sritis G^* yra tokio pavidalo (tokia taisyklė taikoma gamykloje „Ekranas"):

$$G^* = \{(Y_{11},Y_{10},Y_{01}) : Y_1 = Y_{11}+Y_{10} \le 1, Y_2 = Y_{11}+Y_{01} \le 1,\}.$$

Kintamųjų (Y_1,Y_2) erdvėje priėmimo sritį sudaro keturi taškai: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Kintamųjų (Y_{11},Y_{10},Y_{01}) erdvėje tai atitinka penkis taškus: (0,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,0,0), (0,1,1).

Gaminių srauto, patenkančio į sandėlį po pirmojo kontrolės ciklo, dydis :

$$P_1^{(1)} = \mathbf{P}\{\mathbf{Y} \in G^*\} = P_1^{(1)}(0)(1+b_1+b_2+b_1b_2),$$

$$b_i = \frac{n\gamma_i}{\eta_i+n-1}, \quad i = 1,2; \quad P_1^{(1)}(0) = \frac{(\eta_1+n)^{[n]}(\eta_2+n)^{[n]}}{(\gamma_1+\eta_1)^{[n]}(\gamma_2+\eta_2)^{[n]}}.$$

Vidutinis partijų, patekusių į sandėlį po pirmojo atrankinės kontrolės ciklo, suminis defektingumo lygis yra

$$q_1^{(1)} = \frac{q_1(0,0,0)+b_1q_1(0,1,0)+b_2q_1(0,0,1)+b_1b_2q_1(1,0,0)}{1+b_1+b_2+b_1b_2}.$$

Aposteriorinis (θ_1, θ_2) skirstinys, kai $\mathbf{Y} = (m_{11}, m_{10}, m_{01})$, irgi turi nepriklausomas koordinates, pasiskirsčiusias pagal beta dėsnius:

$$(\theta_i \mid \mathbf{Y} = \mathbf{m}) \sim Be(\gamma_i + m_i, \eta_i + n - m_i), \quad i = 1,2;$$

$$m_1 = m_{11} + m_{10}, \quad m_2 = m_{11} + m_{01}.$$

Todėl tankis $g^{(1)}(\theta_1, \theta_2)$ yra beta skirstinių tankių sandaugų svertinis vidurkis:

$$g^{(1)}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\Sigma^* \mathbf{P}\{\mathbf{Y} = \mathbf{m} \mid \boldsymbol{\theta}\} f_1^* f_2^*}{\Sigma^* \mathbf{P}\{\mathbf{Y} = \mathbf{m} \mid \boldsymbol{\theta}\}},$$

$$f_1^* = f(\theta_1 \mid \gamma_1 + m_1, \eta_1 + n - m_1),$$

$$f_2^* = f(\theta_2 \mid \gamma_2 + m_2, \eta_2 + n - m_1);$$

čia Σ^* reiškia, kad sumuojama srityje $\{\mathbf{m} \notin G^*\}$. Pateiktai priėmimo sričiai gauname tankio išraišką:

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\theta_1, \theta_2) = {} & [f(\theta_1 \mid \gamma_1, \eta_1) f(\theta_2 \mid \gamma_2, \eta_2) - \\ & - P_1^{(1)}(0)\{f(\theta_1 \mid \gamma_1, \eta_1 + n) f(\theta_2 \mid \gamma_2, \eta_2 + n) + \\ & + b_1 f(\theta_1 \mid \gamma_1 + 1, \eta_1 + n - 1) f(\theta_2 \mid \gamma_2, \eta_2 + n) + b_2 \times \\ & \times f(\theta_1 \mid \gamma_1, \eta_1 + n) f(\theta_2 \mid \gamma_2 + 1, \eta_2 + n - 1) + b_1 b_2 \times \\ & \times f(\theta_1 \mid \gamma_1 + 1, \eta_1 + n - 1) f(\theta_2 \mid \gamma_2 + 1, \eta_2 + n - 1)\}] / \\ & /[1 - P_1^{(1)}(0)] \end{aligned}$$

ir vidurkius

$$\mu_1^{(1)} = \frac{\mu_1 - P_1^{(1)}(0)\{a_1(0) + a_1(1)b_1 + a_1(0)b_2 + a_1(1)b_1 b_2\}}{1 - P_1^{(1)}(0)(1 + b_1 + b_2 + b_1 b_2)},$$

$$\mu_2^{(1)} = \frac{\mu_2 - P_1^{(1)}(0)\{a_2(0) + a_2(0)b_1 + a_2(1)b_2 + a_2(1)b_1 b_2\}}{1 - P_1^{(1)}(0)(1 + b_1 + b_2 + b_1 b_2)},$$

$$\mu_{12}^{(1)} = \frac{\mu_1 \mu_2 - P_1^{(1)}(0)\{a_1(0)a_2(0) + a_1(1)a_2(0)b_1\}}{1 - P_1^{(1)}(0)(1 + b_1 + b_2 + b_1 b_2)} -$$

$$- \frac{P_1^{(1)}(0)\{a_1(0)a_2(1)b_2 + a_1(1)a_2(1)b_1 b_2\}}{1 - P_1^{(1)}(0)(1 + b_1 + b_2 + b_1 b_2)}.$$

Kartu galime apskaičiuoti ir srauto, patenkančio į atrankinę kontrolę po pertikrinimo ir remonto operacijų, defektingumo lygius (10) ir (11).

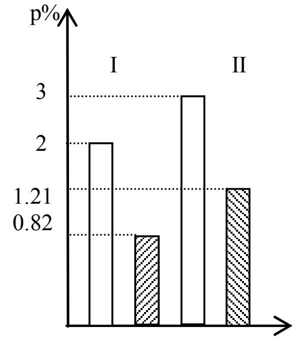
Srauto dydžio $P_1^{(2)}$ ir defektingumo lygio jame $q_1^{(2)}$ išraiškos gana sudėtingos. Tai susiję su gaminio būsenų tikimybių (8) išraiškomis.

Skaitinis pavyzdys

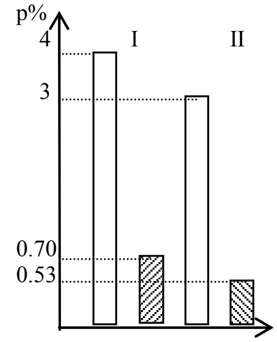
Modeliavimo ESM būdu palyginsime aprašytus kontrolės variantus imdami konkrečias parametrų vertes.

Tarkime, kad jungtiniame gaminių sraute po gamybos operacijos vidutiniai defektingumo lygiai pagal pirmąją ir antrąją parametrų grupes yra 0,022 ir 0,03.

Sakykim, kad pagrindinio srauto dydis $\alpha = 0{,}9$ ir yra parinktos tokios parametrų vertes: $\gamma_1 = 2,\quad \gamma_2 = 3,$ $\gamma_1 + \eta_1 = \gamma_2 + \eta_2 = 100$; N=300; n=50. Vidutiniai defektingumo lygiai yra 0,02 ir 0,03. Sumodeliavę gauname, kad sandėlyje šie defektingumo lygiai sumažėja iki verčių (11): 0,0082 ir 0,0121 (2 pav. užbrūkšniuoti stulpeliai).



2 pav. Pagrindinis srautas (90 %)



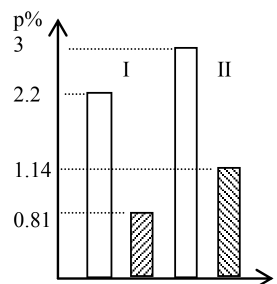
3 pav. Mažesnis srautas (10 %)

Mažesniajame sraute, kurio dydis $1 - \alpha = 0{,}1$ buvo parinktos tokios parametrų vertės: $\beta_1 = \beta_2 = 0.25$; $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 3$, $\gamma_1 + \eta_1 = \gamma_2 + \eta_2 = 100$, t. y. defektingumo lygiai yra 0,04 ir 0,03. Praleisdami pirmąjį atrankinės kontrolės ciklą sandėlyje, gauname defektingumo lygius 0,0070 ir 0,0053. Jie pavaizduoti 3 pav.

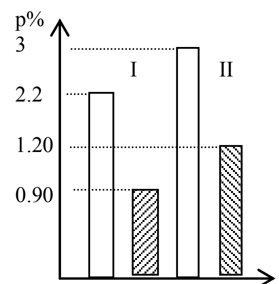
Sujungę šiuos du srautus sandėlyje, gausime defektingumo lygius 0,0081 ir 0,0114 (4 pav.).

Jeigu vienoda kontrolė būtų atliekama visam jungtiniam srautui, tai sandėlyje gautume vidutines defektingumo lygių vertes 0,0090 ir 0,0120 (5 pav.).

Matome, kad vidutinis defektingumo lygis, skaidant gaminius į srautus, sumažėja abiem parametrų grupėms. Labiau jis sumažėja (10 %) pirmajai parametrų grupei.



4 pav. Sugriežtinta kontrolė



5 pav. Įprastinė kontrolė

Reikia pasakyti, kad pertikrinimo ir remonto operacijų apkrovimas padidėja palyginti mažai: nuo 65,6 % jungti-niam srautui iki 68,4 %.

Suprantama, kad pateikti rezultatai gali būti traktuojami tik kaip preliminari prognozė. Modelio parametrai parinkti gana laisvai: buvo stengiamasi tik išlaikyti nusistovėjus vidutinius defektingumo lygius po gamybos operacijos. Todėl ateityje būtina patikslinti modelį ir jo parametrus, remiantis eksperimento metu surinktais statistiniais duomenimis.

Literatūra

1. **Vaišvila A., Kalnius R., Eidukas D.** Kineskopų priimamosios kontrolės matematiniai modeliai // Elektronika ir elektrotechnika. – Kaunas: Technologija, 2002. – Nr.5(40). – P.7–15.
2. **Большев Л.Н.** Приложения эмпирического байесовского подхода // Тр. Междунар. конгр. математиков (Ницца, 1970). – М.: Наука, 1972. – С.48–55.
3. **Беляев Ю.К.** Вероятностные методы выборочного контроля. – М.: Наука, 1975. – 407 с.

Pateikta spaudai 2004 02 17

J. Kruopis, A.Vaišvila. Atrankinė kontrolė skaidant gaminius į du srautus // Elektronika ir elektrotechnika. – Kaunas: Technologija, 2004. - Nr.7 (56). – P.55-60.

Gamyklos “Ekranas” reklamacijų skyrius nustatė, kad, vartotojų reklamuotų kineskopų aibėje yra žymiai daugiau tokių, kurie buvo pripažinti blogais gamybos metu, juos teko remontuoti arba pakartotinai atlikti dalį technologinių operacijų. Ši apriorinė informacija įgalina gamybos metu išskirti remontuotus kineskopus į atskirą srautą, pritaikant jam sugriežtintą išleidžiamosios kontrolės variantą. Galima laukti, kad tokiu atveju gamykloje bus išaiškinta didesnė dalis blogų gaminių, negu taikant vienodą kontrolės variantą visam jungtiniam srautui ir reklamacijų procentas sumažės.

Sukonstruotas išleidžiamosios atrankinės kontrolės matematinis modelis, kai remiantis informacija iš gamybos operacijų, gaminiai suskaidomi į du srautus ir jiems taikomi skirtingi kontrolės planai. Skaitinio modeliavimo ESM metodu parodyta, kad tokia kontrolė gali būti efektyvesnė už kontrolę, kai taikomas vienodas planas jungtiniam gaminių srautui. Il. 5, bibl. 3 (lietuvių kalba, santraukos lietuvių, anglų ir rusų k.).

J. Kruopis, A.Vaišvila. Sampling Control Splitting Products into Two Flows // Electronics and Electrical Engineering. – Kaunas, Technologija, 2004. - No. 7(56). – P.55-60.

The department of the reclamations of the enterprise "Ekranas" has established, that in set advertised by the consumer kinescopes is present much more such, which during manufacture were recognized defective, they should be repaired or repeatedly to carry out for them some technological operations. This a priori information allows to allocate subjected to repair kinescopes in a separate flow, applying for it the strengthened variant of the final control. It is possible to expect, that in such case at the enterprise will be revealed more defective products than in case one variant of the control to all incorporated flow is applied and, hence, percent of the reclamations will decrease.

The mathematical model of the sampling final control is constructed, when the products are divided into two flows using the information from the manufacture and different plans of the control are applied to each flows. By a method of numerical simulation is shown, that such the control can be more efficient in comparison with such, when the same plan for the joint flow is used. Ill. 5, bibl. 3 (in Lithuanian, summaries in Lithuanian, English and Russian).

Ю. Круопис, А. Вайшвила. Выборочный контроль при разбиении изделий на два потока // Электроника и электротехника. – Каунас: Технология, 2004. – № 7(56). – С.55-60.

Отдел рекламаций предприятия «Экранас» установил, что в множестве рекламированных потребителем кинескопов имеется значительно больше таких, которые во время производства были признаны дефектными, их приходилось ремонтировать или повторно проводить для них некоторые технологические операции. Эта априорная информация позволяет выделить подвергнутые ремонту кинескопы в отдельный поток, применяя для него усиленный вариант выпускного контроля. Можно ожидать, что в таком случае на предприятии будет выявлено больше дефектных изделий чем в случае, если применяется один вариант контроля всему объединенному потоку и, следовательно, процент рекламаций уменьшится.

Построена математическая модель выборочного выпускного контроля, когда на основании информации из производства изделия разбиваются на два потока, каждому из которых применяется разные планы контроля. Методом численного моделирования на ЭВМ показано, что такая контроль может быть более эфективной по сравнению с такой, когда используется один и тот же план для всего объединенного потока изделий. Ил. 5, библ. 3 (на литовском языке; рефераты на литовском, английском и русском яз.).

DOI: 10.5755/j02.eie.10851